# 目　录

# 中国数学史研究仍是一个广阔的领域

李　迪
（内蒙古师范大学科学史研究所）

从本世纪一十年代起国内外一些学者开始对中国数学史进行了大量研究，八十代以来用中、日、英、俄、德、法等各种文字发表了许多论著，仅通史性的著作就有十余种，专题性著作、数学家传记和科普作品还有一大批。目前，研究者显著增加，有时想选择一个适当的研究课题都感到困难。给人们的印象是：中国数学史似乎已经没有什么好研究的了。事实并非如此。实际上，中国数学史仍是一个广阔的研究领域，还有很多工作等待人们去完成。以下将分四个问题予以讨论。

## 一　资料发掘工作

在中国数学史研究中，大规模的资料工作可以说已告一段落，研究者已陆续转入其它方向。但是这不等于资料工作到了尽头。中国既是一个历史悠久的国家，又是一个多民族的大家庭，典籍浩如烟海，地下文物丰富，民族文物的数量更为可观。研究者没有把其中有关的数学史料全部找出来，已找出来的主要是上面的，而那些深层次的资料还有很多，需要进一步挖掘。另一方面，由于数学的发展，资料的范围经常在扩大，从这个意义上讲，资料工作是永远也做不完的。为了说明方便起见，分以下三个方面：

1、文字资料。人们一般所指资料，基本上就是文字资料，研究者最熟悉，使用的也最多。目前，这类资料还时有发现，有的还相当重要，尚未发现的到底有多少，很难预料，估计为数不会太少。

最容易找到的是零散史料，在一些古人写的笔记、札记、文集、史书等作品中都能找到一些。例如在《蘅华馆日记》中包括着许多有关李善兰的事迹资料，由于这些资料都是具有确切年月日的，所以是丰富年谱内容的绝好资料。该日记中还涉及到华蘅芳、吴嘉善等数学家的活动情况[1]。在《苏甘室日记》、《熙朝新语》等书中都有关于数学的记载。至于著名数学家本人的日记、文集、诗集等更是应当注意的，有些人们已经熟知，如李锐的《观妙居日记》就是一例[2]。然而，有的至今未被人注意，如何承天的《何衡阳集》除笔者[3]引用外，未见他人提及。按笔者的体会，时代越早的资料往往价值越大。

整本的文献也时有发现。这又分为两种情况，其一是新版本数学书的发现，以李俨[4,5]和丁福保等[6]的著录为准，新发现的大约有五百种以上，其中包括刊本、石印本、活字本、铅印本、抄本和稿本。光是程大位的《算法统宗》和《算法纂要》的明刊本就有多部[7]，朱载堉的《嘉量算经》也发现了明刊本[8]。抄本、稿本也不少，如李潢的《海岛算经细草图说》、杜知耕

的《几何论约》和《数学钥》、崔朝庆《四元一得》、李冶的《测圆海镜》等等都发现了抄本。卢靖的《迭微分补草》，过去只知"未刊"，可是最近发现了稿本[9]。还有被认为已经失传的著作，竟有抄本存在，清代博启的著作就是一例[10]。到底有多少种，由于没有公布和统计，无法说清楚。仅就笔者所知就有一百数十余种之多，就连华蘅芳这样的大家还有人们不知道的著作保存在一些图书馆里。康熙时提议由政府编纂数学书的陈厚耀有《勾股图解》等书尚存

及[20]，他人以为只有这两个，辗转因袭。直到现在才有人进行了全面的研究[21]。汪莱是一位被人们注意的清代数学家，虽然在一些专门论著中一再提到他的工作，但是就在大家熟知的《衡斋算学》中还有人们没有研究的篇章，其中最重要的要算《递兼数理》一篇，该篇详论组合问题[22]。就是《九章算术》及刘徽注这样国内外许多学者研究多年的文献，至今还偶有新内容被发现。《孙子算经》等书中仍有一些内容未进行研究。

2. 研究的深入。许多被 研究过的问题，或提过的问题，往往是停留在表面上没有深入下去，需要进一步研究。近来这方面的工作是很多的，例如对"阳马术"的研究，对"牟合方盖"的研究，[23]，对保其寿浑圆图"的研究[24]，等等。对《九章算术》中的最小公倍数有了全面而深入论述[25]，对贾宪《黄帝九章算经细草》[26]、刘益及其《议古根源》[27]、《益古集》[28]等失传的宋代数学著作都有了专门研究，等等。对秦九韶及其《数书九章》的研究不久前曾呈现一种繁荣景象，从七十年代比利时李倍始的工作[29]到 1987 年国际会议和《秦九韶与<数书九章>》（北京师范大学出版社）的出版达到高潮，但不能说已经把所有的问题都 研究到家、没有任何东西可研究的了。明代数学一向被认为是落后时期，除五十年代日本的武田南雄(1909—1956 年)对明代数学的综合研究[30,31]和很多人对程大位及其著作进行研究外，重要的微观专题研究还不多。清代数学的深入研究日渐增加，除上面提到的保其寿外还有很多。

3. 对文献提出不同的理解和争论。中国数学史研究中的许多问题没有定论或公认的看法，几年前笔者曾提出一大批未解决的问题[32]，其中绝大部分是属于微观性质的，时至今日还没有一个得到了彻底解决。但笔者所说的未解决的问题仅人们比较熟悉的那一部分，新提出的问题几乎是层出不穷，例如对刘徽"以面命之"的新理解[33]，对祖冲之"缀术"的探讨[34]，就是对那些似乎已有定论的问题也提出了新的看法，对《张邱建算经》成书年代的研究就是一例[35]。著称于世的"大衍求一术"，人们几乎是异口同声地说是中国古代杰出的数学成就之一，可是对具体方法的理解上至今仍未取得一致。在前人著作中还存在一些错误，对一些问题的理解也不完全正确，都要通过认真研究陆续予与纠正。所有这些工作都等待人们去完成。

4. 从新的角度进行研究。我们这里所说的"角度"是指大的方向，如新的数学分支，新的学术观点，民族学等等，而不是小的改变。就目前所见到的研究来看，组合论对中国数学史研究的影响最为突出。原来认为已经研究得差不多或本来就无须下功夫研究的问题，从组合论的角度探讨的结果使人大吃一惊，几乎就是在原来的文献中发现了大批高水平的成果，其中最典型的是清代数学家中的明安图、戴煦、李善兰和华蘅芳。八十年代以前，人们就对这些人进行了较多的研究，在中国数学史界都很熟悉。近来中外学者几乎同时从组合论的角度对李善兰的《垛积比类》一书进行了研究，发现其中包括第一种斯特灵数和欧拉数等重要成果[36,37]。对戴煦著作的研究，则发现并定义了"戴煦数"[38]，对夏鸾翔的研究也产生了同样的情况。清末华蘅芳曾被 认为是水平不高的数学家，可是最近发现了他在计数函数方面[39]和在有限差分方面的贡献[40]。新近对明安图《割圜密率捷法》的研究，查明了其中包括后来才命名的"卡塔兰数"[41]以及其它一系列新的发现。由此可以初步得出一个结论：清代数学的水平绝非以往人们所认为的那样低，如果从组合数学的角度来看的话，水平也还是较高的。当然还可以从其它角度，如运筹学等研究中国数学史，也可能获得可观的结果。

从民族学的角度进行研究，近来也已逐渐引起人们的注意，蒙古族的"朵尔海"和羌族的数学有了初步的报道[42,43]。对于每个少数民族都可以进行类似研究，并会获得意想不到的

成果。

对于外史的个别研究也是微观性质的，这方面近来也有新的进展[44]，但主要的是宏观的问题。

## 三 宏观研究

所谓“宏观研究”是指对中国数学史进行全面的综合研究或从某一侧面进行整体探讨。目的在于解决一些带有规律性的重大问题。宏观研究不能脱离微观研究，可以说前者是建立在后者之上的。当微观研究发展到一定程度时，必然要进行宏观研究。中国数学研究已经发展到这个阶段，有些工作已经开始。这种研究，可以不严格的分为以下三类：

1. 总体综合研究。这就是把中国数学史作为一个整体而进行全面而综合的研究，既包括自身的，也包括与外国比较的和社会等几大方面。对中国数学史自身的研究主要探讨其内在发展规律，找出其特点，但是对规律的研究至今甚少，而对特点的研究已有良好的开端[45]。如果真正抓住了特点，就可以在此基础上探求规律性。比较研究是近年人们开始注意的方向之一，与印度的比较已有了较系统的工作[46]，至于和其他国家的比较尚少进行，不过个例比较还是有的，如某数学家与外国某数学家、或具体成果的比较等都属于微观的范围。对于宏观的中国数学社会史的研究，包括思想史在内，目前还处于初级阶段，在〔44〕中有这方面的工作。很显然，数学教育史应当属于数学社会史领域，这方面的研究虽早已开始，但缺少系统的工作，已有的又是多为资料性质的。

2. 从数学本身的某个侧面进行研究。这里也是指就中国数学的整体从不同的侧面或是观点所做的探讨，近年来已有人从事这方面的尝试，例如从程序性观察中国的传统数学[47,48]，认为中国传统数学具有程序的性质。与此相联系的是计算的机械化问题，这个问题也有人进行了研究[49]。还有人从范式与结构的角度探讨了中西数学问题，比较了中西的差别[50]。当然还可以从其他侧面研究中国传统数学，此种研究没有任何限定，但是其前提是需要对中国传统数学有较多的了解。这种了解，又往往和研究者和兴趣、数学专业基础有直接关系，因此可以有各种不同的侧面。

3. 专题性的综合研究。这里所谓“专题性”指不是中国数学史的整体问题，而是个别重大问题。近年来颇引人注意的问题有明代的数学落后原因和与此相应的是近代数学为什么没有在中国产生的探讨，先后有多人发表见解，有人认为元代中叶以后中国数学中断由数学本身的特点和统治者的政策两方面原因造成的[51]，还有人单从中国的数学本身的弱点进行了分析[52]等等。对于唐代数学教育该如何评价也是一个值得研究的重大问题，一方面是规模很大，盛况空前，另一方面没有培养出象样的人才，是一明显的矛盾现象，这种现象是怎样造成的？是好还是坏？应给出回答。上面提到的武田南雄的工作是以一个数学家程大位为中心展开的，如果把程大位改为一些数学家就变成宏观问题了。由此可以看出，宏观研究和微观研究有时是不好区分的，而且也没有必要区分。

以上所列举的各种问题或研究成果，都是为了说明中国数学史需要进行研究的问题多得很，但是想找到一个较容易解决而且又能取得较好的成果的问题也越来越难。

今后的主要研究方向是什么呢？这个问题已经有人考虑过，例如李国伟认为“应该更加

重视数学思想的内在理路"的研究[33]，洪万生则提出三点：即（1）对刘徽的再深入研究，很可能取得重大突破；（2）对十三世纪中算理论体系的研究，必然大大加强；（3）对明末清初以来的杰出数学家的著作，必须进行大规模的研究[34]。他所说的第三点需要研究的问题最多，有些内容几乎没有人搞过，应当彻底清理一番。不过，这些都是属于内史的范围，而外史还有大量的问题等待人们去探讨。少数民族数学史、中外数学史比较研究也都是大方向。

## 参考文献


〔1〕李迪："有关李善兰的一些新史料"，载本书。

〔2〕郭世荣："李锐《观妙居日记》研究"，《文献》，1986年第2期，第248—263页。

〔3〕李迪：《中国数学史简编》，1984年，辽宁人民出版社，第111页。

〔4〕李俨："明代算学书志"，《中算史论丛》第二集，1954，中国科学院出版，第86—102页。

〔5〕李俨："近代中算著述记"，同上，第103—308页。

〔6〕丁福宝、周云青：《四部总录算法编》，1957年，商务印书馆。

〔7〕李迪："国内收藏的明刊本与抄本《算法统宗》与《算法纂要》"，《中国数学史论文集》（二），1986年，山东教育出版社，第48—55页。

〔8〕徐子蛮、陆国强："十二平均律与《嘉量算经》"，《光明日报》1979年4月4日。

〔9〕李兆华："卢靖两稿本数学书跋"，载本书。

〔10〕那日苏："对博启《勾股形内容三事和较》的研究"，《中国少数民族科技史研究》第一辑，1987年，内蒙古人民出版社，第43—51页。

〔11〕郭世荣："汉简屯戍记录中的实用数学"，《内蒙古师大学报》（自然科学），1989年第1期的"科学史增刊"，第50—57页。

〔12〕华印椿：《中国珠算史稿》，1987年，中国财政经济出版社，第31—33页。

〔13〕宝鸡市博物馆等："千阳县西汉墓中及其出土的算筹"，《考古》1982年第2期，第85—88页。

〔14〕李胜伍、郭书春："石家庄东汉墓及其出土的算筹"，《考古》1982年第3期，第255—256页。

〔15〕白尚恕、李迪："故宫珍藏的手摇计算机"，《故宫博物院院刊》1980年第1期，第76—82页。

〔16〕李迪、白尚恕："康熙年间制造的手摇计算器"，《中国数学史论文集》（一），1985年，山东教育出版社，第52—57页。

〔17〕李家瑞："云南几个民族记事和表意方法"，《文物》1962年第1期，第12—14页。

〔18〕青海省文物管理处考古队等：《青海柳湾》下，1984，文物出版社，图版 三七。

〔19〕林声："晋宁石寨山出土铜器图象所反映的西汉滇池地区的奴隶社会"，《文物》1975年第2期，第69—81页。

〔20〕李俨："中算家之纵横图研究"，《学艺》第8卷9号（1927年），第1—40页。又收入《中算史论丛》第一集，1954年，中国科学出版，第174—229页。

〔21〕王荣彬："丁易东对纵横图的研究"，载本书。

〔22〕李兆华："汪莱《递兼数理》、《参两算经》略论"，同〔7〕，第65—33页。

〔23〕D. B. Wagner, Liu Hui and Tsu Keng—chih on the Volume of a Sphere, *Chinese Science*, 1978, 3, PP. 59—79。
〔24〕Ko-Wei Lih, Bo Qi—Shou 保其寿 and His Poyhedrl Hun Yuan Tu 浑圆图, *Science and Technology in Chinese Civilization*, Edited by Cheng—Chen Yih 程贞一, 1987, *World Scientific*, PP. 93—108
〔25〕梅荣照："《九章算术》少广章中求最小公倍数的问题"，《自然科学史研究》第3卷，第3期（1984），第203—208页。
〔26〕郭书春："贾宪《黄帝九章算经细算》初探"，《自然科学史研究》第7卷第4期（1988），第328—334页
〔27〕特古斯："刘益及其佚著《议古根源》"，载本书。
〔28〕徐义保："对《益古集》的复原与研究"载本书。
〔29〕U. Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*, 1973, London。
〔30〕武田南雄："明代数学的特质 I"，《科学史研究》第28号（1953），第1—11页。"明代数学的特质 II"同上第29号（1953），第8—18页。
〔31〕武田南雄："中国的民众数学"，《自然》1953年9月号，第57—62页。
〔32〕李迪："中国数学史中的未解决问题"，《中国数学史论文集》（三），1987年，山东教育出版社，第10—27页。
〔33〕李继闵："刘徽关于无理数的论述"，《西北大学学报》第9卷第1期（1989），第1—4页。
〔34〕査有梁："缀术求π新解"，《大自然探索》，1986年第4期，第133—140页。
〔35〕冯立升："《张邱建算经》的成书年代问题"，载本书。
〔36〕罗见今："李善兰对 Stilirng 数和 Euler 数的研究"，《数学研究与评论》第2卷第4期（1982），第173—182页。
〔37〕〔法〕J. —C. Martzloff 著，罗见今译："李善兰的有限和公式"，《科学史译丛》，1983年第2期，第1—6页。
〔38〕罗见今："戴煦数"，《内蒙古师范大学报》（自然科学），1987年第2期，第12—22页。
〔39〕罗见今："华蘅芳的计数函数和互反公式"，《中国数学史论文集》（二），1986年、山东教育出版社，第107—124页。
〔40〕纪志刚："华蘅芳的有限差分研究"，载本书。
〔41〕罗见今："明安图是卡塔兰数的首创者"，《内蒙古大学学报》（自然科学），1988年第2期，第239—244页。
〔42〕色登、苏瓦迪、萨仁图雅："蒙古族'朱尔海'中的数理内容"，《中国少数民族科技史研究》第一辑，1987年，内蒙古人民出版社、第36—42页。
〔43〕周开瑞："羌族数学史初探"，载本书。
〔44〕周瀚光：《传统思想与科学技术》，1989年，学林出版社。
〔45〕李继闵："试论中国传统数学的特点"，《中国数学史论文集》（二），1986年，山东教育出版社，第9—18页。
〔46〕沈康身："中国与印度在数学发展中的平行性"，《中国数学史论文集》（一），第67—98页。

〔47〕李迪："中国传统数学的程序性"，《香港大学中文系集刊》第一卷第二期（1987），第219—232页。
〔48〕K. Chemla, Should They Read Fortran as if It were English? 同上，第301—316页。
〔49〕吴文俊："从《数书九章》看中国传统数学构造与机械化的特色"，《秦九韶与〈数书九章〉》，1987年，北京师范大学出版社，第73—88页。
〔50〕乐秀成："数学中的范式与结构"，《科学传统与文化》，1983，陕西科学技术出版社，第221—238页。
〔51〕梁宗巨："中国数学落后的历史原因分析"，《自然辩证法通讯》第5卷第3期（1983），第49—52页。
〔52〕郭金彬："14世纪后中国数学中断的原因"，同上第52—55页。
〔53〕李国伟："初探'重差'的内在理路"，《科学史通讯》（台湾）第三期，1984，第3—8页。
〔54〕洪万生："因物成率·审辩名分—试论中算史研究的几个大方向"，同上，第9—12页。

## 出版信息

△ 《内蒙古师大学报》（自然科学版）1989年第一期"科学史增刊"出版。这本科学史增刊收载论文13篇，有数学史、天文学史、物理学史、医学史和少数民族科技史，中日科技史比较研究。目录如下：北宋仁宗（1022—1063）时的天文学研究（李迪）、一批明代医学家的传记史料（李迪、梅青田）、清初改历斗争与康熙帝天算学术（金福）、《几何原本》有关问题研究（莫德）、明安图首创卡塔兰数的方法分析（罗见今）、华蘅芳的内插法（罗见今）、汉简屯戍记录中的实用数学（郭世荣）、《数术记遗》及甄鸾注研究（冯立升）、《张邱建算经》的经济史料价值（牛亚华）、《费隐与知录》中的热力学流体力学剖析（王艳王）、《蒙古风俗鉴》中的科技史内容（刘长春）、著名物理学家萨本栋教授（张子文）、中国的洋务和日本的维新（那日苏）。（升）

△ 《中国少数民族科技史研究》第四辑（李迪主编）出版。由内蒙古人民出版社出版的《中国少数民族科技史研究》第四辑，已于1989年底见书。这本论文集包括21篇论文、论述壮、瑶、蒙古、傣、满、彝、藏、回、台湾的阿美、雅美等民族和古代西域、西夏，色目人等在天文学、历算教育、农牧业技术、水利、医药、工艺、冶金、机械制造、以及对花山岩画，元、明两代科技政策对比等综合研究第五辑也将于近日出版。（升）

△ 李迪著《中国科学技术史论文集》第一辑出版。最近将由内蒙古教育出版社出版李迪教授所著《中国科学技术史论文集》第一辑，收载尚未公开发表的论文27篇（其中有1篇差不多全文发表过），包括综合研究、科学家传记、少数民族科技史、数学史、天文历法史、物理学史、机械史、农书研究、医学史、地学史和傅兰雅汉文译著目录等。（荣）

# 西方数学文献举隅广义[①]

沈康身
（杭州大学数学系）

获得和运用第一手文献资料是科学史研究者非常重要的工作，但是文献浩如烟海，可遇而难求。文献汇编（Source book）是行家把所见第一手文献摘抄必备部分并作提要，极便于后学入门和查阅，曾于1988年春天访华的美国道本周（J. W. Dauben）博士著有《古今数学历史—文献菁华》（The History of Mathematics from Antiquity to the Present—A Collective Bibiograph，Ny and London，1985）。全书6章，共收文献提要2384篇，可谓文献汇编的汇编。一编在手，古今有关事项了如指掌。其中第二章有“数学文献汇编”9种提要，同名书二种值得我们的注意，A Source Book in mathematics；其一D. E. Smith著，1927年初版，介绍文艺复兴前后重要数学文献，其一D. J. Struik著，1968年初版，介绍1200—1800年拉丁文著作中杰出文献，分算术、代数、几何、牛顿前数学分析、牛顿、莱布尼茨及其学派五部分，前者有五十年代重印本，散见各图书馆，后者因各种原因国内少见，最近笔者得读全书，深受教益。着于“直径”难得，译出部分公诸同好，1200—1800年间，六百年欧洲学术绚丽璀璨，举世景从，人每誉文艺复兴是世界文化摇蓝，世界各民族就似无出其右者，殊不知我中华文明源远流长，我国各种原始文献极为丰沛。如作一对比，不难发现中华数学造诣尤其遥遥领先于前。近日蒙李迪教授征文，特在算术、代数、分析三项中任择一题举隅，论述心得，文名广义，就正同道。

## 一　斯吉文十进数

斯吉文（S. Stevin，1548—1620）于1585年著《十进数》（La Disme），使分数运算化为整数运算，除了在所用符号有异外，其运算法则与今无异，此书分上下两篇。

上篇　关于十进制的定义

定义1　十进数是算术的组成部分，数由十进数列数字表示，人类活动中一切计算都可以用十进数记出，毋须再求助于分数。

说明　某数设为一千一百一十一，用数字可记为1111，其中每一个1都是前一个1的十分之一，同理，2378的8每单位都是7每一单位的十分之一，其余数字同理类推。我们用数位名称称呼的数都可以用十进数表示，这是方便的，这种记数法则就称为十进位值制，借此毋须用分数，就可以记出一切活动中所出现的数。

① 本文为国家自然科学基金项目。

定义 2　整数的记号是⓪

说明　我们称三百六十四为整数，记为 364⓪，类似地可以记其他整数。

定义 3　整数单位的十分之一，称为十分位，其记号是①，十分位的十分之一称为百分位，记号是②，如此类推其余。

说明　3①7②5③9④就表示 3 个十分位数，7 个百分位数，5 个千分位数，9 个万分位数，如此类推，可以把数记到无穷多位，至于他们所值是多少，你可以根据定义得知，所记数是 $\frac{3}{10}$，$\frac{7}{100}$，$\frac{5}{1000}$，$\frac{9}{10000}$。合并就是$\frac{3759}{10000}$在所有各数位中 除⓪以外，都不允许超过 9，例如不允许记为 7①12②，应改为 8①2②。

定义 4　定义 2、定义 3 所记数合称为十进数，

下篇　关于运算或实践

命题 1　加法　已给十进数，求和。

已给 27⓪8①4②7③，37⓪6①7②5③，875⓪7①8②2③求三数之和。

作法　按数位上下对准，按整数加法运算，其和是 941304，记出数位，当是 941⓪3①0②4③。

证明　从定义 3 知 27⓪8①4②7③就是 27 $\frac{8}{10}\frac{4}{100}\frac{7}{1000}$，合并就是 27 $\frac{847}{1000}$同理 37⓪6①7②5③就是 37 $\frac{675}{1000}$，875⓪7①8②2③就是 875 $\frac{782}{1000}$，按照常规加法，三数的和是 941 $\frac{304}{1000}$，应记为 941⓪3①0②4③。证毕。

| | | ⓪ | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 7 | 8 | 4 | 7 |
| | 3 | 7 | 6 | 7 | 5 |
| 8 | 7 | 5 | 7 | 8 | 2 |
| 9 | 4 | 1 | 3 | 0 | 4 |

注　如果加数中某些数位为空，就应补缺，例如 8⓪5①6②与 5⓪7②相加，后者应补为 5⓪0①7②，然后相加，如有类似情况，下面三个命题都应照此补缺。

命题 2　减法　从十进数减去一个较小的十进数，求差。

已给 237⓪5①7②8③，59⓪7①3②9③，求二者之差。

作法　二数排列如右，按整数常规减法运算，其差是 177839，应记为 177⓪8①3②9③。

证明（略）

| | | ⓪ | ① | ② | ③ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 7 | 5 | 7 | 8 |
| | 5 | 9 | 7 | 3 | 9 |
| 1 | 7 | 7 | 8 | 3 | 9 |

命题 3　乘法　从十进数乘数及被乘数，求二者之积。

已给被乘数是 32⓪5①7②，乘数 89⓪4①6②，求二者之积。

作法　二数排列如右，按整数常规乘法运算，得积 29137122，要知道其值是多少，可以连结末尾数位，都是②二者之和为④，因此积末尾数数位是④，其余数位可以依次上推，此积值应是 2913⓪7①1②2③2④。

证明　略。

注　如果二数数位记号不相同，例如其一数为 3④7⑤8⑥，另一数为 5①4②，仍可以照上面所说那样处理。

| | | | | | ⓪ | ① | ② |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 3 | 2 | 5 | 8 |
| | | | | 8 | 9 | 4 | 6 |
| | | | 1 | 9 | 5 | 4 | 2 |
| | | 1 | 3 | 0 | 2 | 8 | |
| | 2 | 9 | 3 | 1 | 3 | | |
| 2 | 6 | 0 | 5 | 6 | | | |
| 2 | 9 | 1 | 3 | 7 | 1 | 2 | 2 |
| | | | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ |

命题 4　除法　从十进数被除数及除数求商。

已给被除数 3⓪4①4②3③5④2⑤，除数 9①6②，求二者之商。

```
      1
    1 8
    5 1 6 4
    7 6 1 7        ⓪①②③
  3 4 4 3 5 2 ( 3 5 8 7
    9 6 6 6 6
      9 9 9
```

作法　被除数与除数排列如右（已去掉数位记号），按照数常规除法运算，得商 3587，要知道其值是多少，除数末尾数位是②，应从被除数末尾数位⑤中减去，余③。因此商末尾数位是③，其余数位可以依次上推，此商值应是 3⓪5①8②7③。

证明　略。

注 1　如果除数数位高于被除数，可以在被除数末尾数字后根据需要添加 0。例如 7②除以 4⑤，在数字 7 后添加若干个 0，如 7000，做整数常规除法，得商 1750⓪，有时商可能无法用整数表示，例如 4①除以 3②，商有无穷多个 3，出现这种情况时，你可以适当删除一些余数，写成 13⓪3①3 $\frac{1}{3}$②或 13⓪3①3②3 $\frac{1}{3}$③等等，这是完整解答。

注 2　十进数也可以用来开方，例如 5②2③9④开平方，可以借助于整数常规开方法则，得根 23，其数位是被开方数末尾数数位之半，因此根值是 2①3②。如果已给数末尾数位是单数，就应添补为偶数后，再折半。开立方时，取被开立方数数位号的三分之一作为立方根的末尾的数位，开其他次方，依此类推。

D. J. Struik 在本项目提要中指出："在斯吉文《十进数》写作好些世纪以前中国人已使用十进数，这是事实。"对此我们作以下补充说明。

其一、如所周知，我国在春秋战国时代已用算筹记数。记数法则具体记载始见于《孙子算径》："凡算之法先识其位。一纵十横百立千僵。千十相望，百万相当"。《夏侯阳算经》继作补充："满六已上，五在上方，六不积算，五不单张。"借此用算筹可以记出一切整数。所以确实在好些世纪以前中国已具备《十进数》上篇定义 1、定义 2 的记数制度。

我国第一部古典算经《九章算术》对不足整数一个单位的数用分数表示，并且有完整的分数四则运算及开平方、开立方法则。刘徽在注《九章》时用十进数记单位以下尾数，例如他在少广章开方术注中主张："加定法如前，求其微数，微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。"这一理论在方田章圆田术注中有多次实践，在直径 2 尺的圆内接六边形边心距，就是通过上述开十进数的平方获得的，其结果是八寸六分八厘二秒五忽、五分忽之二。这儿以尺为界位，这一结果相当于《十进数》上篇定义 3 中的 8①6②6③0④2⑤5 $\frac{2}{5}$⑥。足见所有定义 1 至 4 关于有理数的十进制记数法在中国古代已很熟练。

其二、《孙子算径》卷上有整数乘法规则："凡乘之法重置其位，上下相见，上位有十，〔下位〕步至十，有百步至百，有千步至千，以上命下，所得之数列于中位。言十即过，不满自如。上位讫者先去之。下位乘讫者则俱退之。"这种算法与《十进数》上篇命题 3 所说是一致的，所不同处在于：一、中国筹算乘法乘积放在被乘数与乘数之间，而《十进数》中乘积放在乘数下面；二、中国筹算法以被乘数首位数字从乘数末尾数字开始从低位到高位依次相乘，随乘随加。乘完后又以被乘数第二位数字，再从乘数末尾数字从右而左依次相乘，随乘随加，照此进行，直到被乘数末位数字遍乘乘数后止。这与《十进数以乘数末位数字遍乘被

乘数开始，在次序上不同，而且后者记出每次部分积，最后以部分积总和作为结果与前者随加随乘又有不同。三、中国古代没有小数乘法的记录。

其三、《孙子算径》卷上还有整数除法规则："凡除之法与乘正异，乘得在中央，除得在上方。假令六为法，百为实。以六除百，当进之二等，令在正百下，以六除一，则法多而实少，不可除，故当退就十位。以法除实，言一六而折百为四十，故可除。若实多法少，自当百之，不当复退。…实有余者，以法命之，以法为母，实余为子。"这儿，孙子以 $100\div6$ 为例对于估商，从被除数中减去部分积，除数退位，带余除法的表示等等算除法步骤描述很是周到，对照《十进数》下篇命题 4 所举例，其运算步骤事实上与孙子所说相同：都是用除数首位放在被除数适当数位之下，使初商是个位数，然后逐步用除数乘初商作为初积。从被除数中去除初积，除数向右退位，继续类似运算，直至余数小于除数为止。所不同的是中国用算筹记数，运算中可以随乘随减，不留中间结果，而《十进数》用笔算，所有中间结果全部写出，随写随划去。

其四、《九章算术》少广章有开平方术和开立方术，在确定平方根，立方根数位时，开平方术说："置积为实，借一算，步之超一等。"刘注云："言百之面十也，言万之面百也。"开立方术说："置积为实，借一算，步之超二等"刘注云："言千之面十也，言百万之面百也"。可见在《九章》成书年代中国已有《十进数》下篇命题 4 注 2 中根的定位见解。

其五、乘法中含加法运算，除法中含减法运算，因此中国人确实在好些世纪以前已熟练掌握《十进数》主要内容。

## 二　卡当解三次方程

卡当（G. Cardan，1501－1576）于 1545 年著《大术》(Ars Magna)，其第 11 章讨论解三次方程问题，原作推理迂回蒙晦，我们逐段译出，并加注段号，以便于说明。

**例题**　设 GH 为边的立方以及 GH 的 6 倍之和是 20，即 $GH^3+6GH=20$，求 GH 是多少。

**解法**：

（1）取二立方 AE，CL，使二者之差是 20，又使二者的边 AC，CK 乘积是 2，即取未知数〔系数〕的三分之一。

（2）在 AC 上截取 BC，使 BC＝CK，于是余下的线段 AB＝GH，这就是所求的线段。

（3）根据本书第六章定理 1*，　我们可以分别理解 DA，DC，DE，DF 立体图形的含意。

DA：$3\times CB\times AB^2$**，DC：$BC^3$，DE：$3\times AB\times BC^2$，　　DF：$AB^3$

（4）$AB\times3AC\times CK$ 意味着 6AB，因此 AB，BC，AC 的乘积的 3 倍是 6AB。

（5）从假设知 $AC^3$、$Ck^3$（即 $BC^3$）的差是 20。而从第六章定理 1 知，这个差就是立体 DA，DE 及 DF 之和，因此这三立体共有和也是 20。

（6）但是 $AB^3$ 等于 $AC^3$ 加上 $3\times AC\times BC^2$，减去 $BC^3$，减去 $3\times BC\times AC^2$。

---

*　定理是说，如 $u^3+3uv^2>v^3+3u^2v$，那么二者之差是 $(u-v)^3$ $(u>v)$

**　为节省篇幅，原作用文字叙述，我们改用运算记号。*定理是说，如果 $a=uv$，那么 $a^3=u^3+v^3+3(u^2v+uv^2)$。

(7) $3\times BC\times AC^2$，$3\times AC\times BC^2$ 之差等于 $3AB\times BC\times AC=6AB$。

(8) 这就是说 $3AC\times BC^2$ 减去 $3BC\times AC^2$，加上 6AB 等于 0。

(9) $AC^3$ 减去 $BC^3$ 等于 $AC^3$ 加上 $3AC\times BC^2$，减去 $3BC\times AC^2$，减去 $BC^3$，加上 6AB，等于 20。

(10) 这是因为从假设 $AC^3$，$BC^3$ 之差是 20。

(11) 进一步说，从第六章定理 2*，$AB^3$ 等于 $AC^3$，加上 $3AC\times BC^3$，减去 $BC^3$，减去 $3BC\times AC^2$。

(12) 因此如所周知 $AB^3$ 加上 6AB 等于 $AC^3$ 加上 $3AC\times BC^2$，减去 $3CB\times AC^2$，减去 $BC^3$，加上 6AB 也等于 20。

(13) 因此 $AB^3$ 与 6AB 等于 20，而 $GH^3$ 与 6GH 也等于 20。从普通常识说，《几何原本》卷 11，命题 31，命题 35 也说 GH 等于 AB**，所以所求 GH 就是 AC，BC 之差。

(14) 但是 AC，BC，或 AC，CK 是二线段，它们所围面积是未知数〔系数〕的三分之一，且二者立方差是方程右端值，我们有以下规则：方程中未知数〔系数〕的三分之一取立方，加上方程右端值之半取平方，二者求和开平方，平方根加上未知数〔系数〕的二分之一，作为甲数，平方根减去未知数〔系数〕的二分之一，作为乙数，甲乙二数各自立方根之差就是所求方程的根。

上引文献在数学发展史上应有划时代意义——高次方程求根公式从此起步。对此我们申述浅见数则：

其一、我们补作文献第 (3) 段所论立体的直观图（图 1）。

其二、文献中心议题是：

假设 $AC^3-CK^3=20$，且 $AC\cdot CK=\frac{6}{3}=2$，其中 CK=BC，那么 $GH^3+6GH=20$ 与 $AB^3+6AB=20$ 为同解方程，其中 AB=AC−CK=AC−BC。

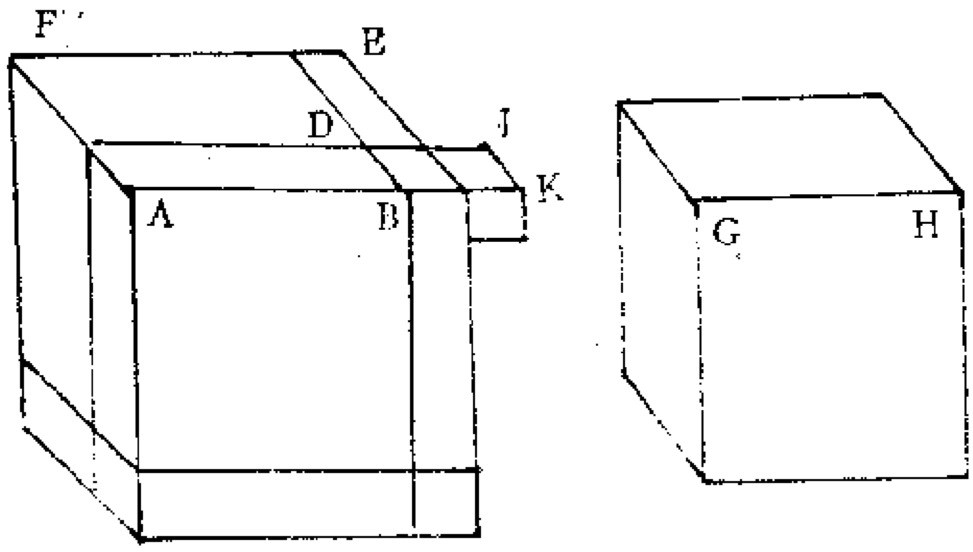



图 1

简明说，命题推导过程是

由于 $AC^3-BC^3=20$（假设）

$AB\times 3AC\times BC=6AB$ (4)

因此 $AC^3-BC^3+3AC\times BC^2-3BC\times AC^2+6AB=0$ (9)

而 $6AB=20-AC^3+BC^3-3AC\times BC^2+3BC\times AC^2$ (11)

又 $AB^3=AC^3+3AC\times BC^2-BC^3-3BC\times AC^2$ (6)

因而 $AB^3+6AB=20$

文献是针对数值例推导，但 (14) 段所给出的却是三次方程 $x^3+px=q$ 的求根公式，规

* 定理是说，如果 a=uu、那么 $a^3=u^3+v^3+3(u^2v+uv^2)$。

** 《几何原本》上这两条命题与 (13) 段内容无关，是卡当误引。

则相当于说，所求根 $x=\sqrt[3]{\frac{p}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3}}-\sqrt[3]{-\frac{p}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3}}$。

其三、我们把图 1 适当变换、组合（图 2），这就是

$AC^3=AB^3+3AC\times BC\times AB+BC^3$

$AB^3+3AC\times BC\times AB=AB^3+6AB=AC^3-BC^3$ 的几何描述。

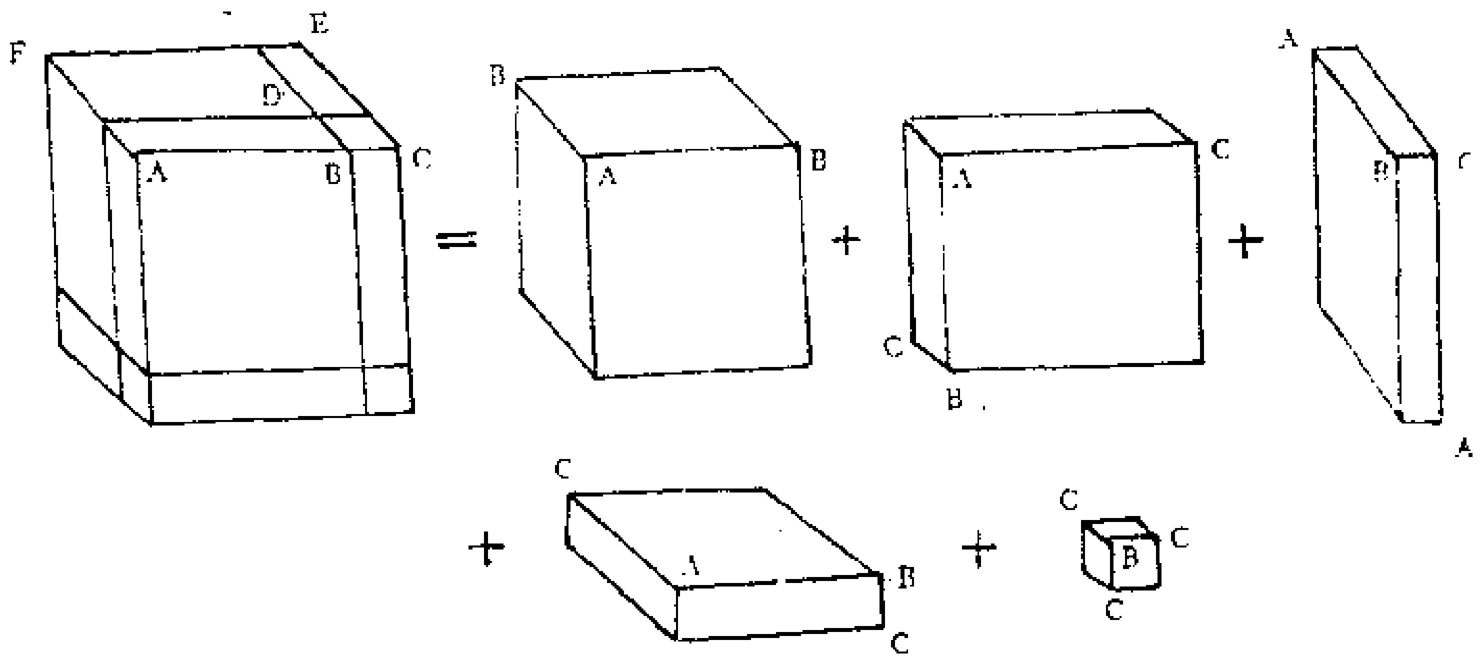



图 2

卡当解三次方程从剖割立方体入手，这与我国《九章算术》开立方术及其刘徽注的设想是一致的。《九章算术》开立方术所说："议所得（初商）以再乘所借一算为法，三之为定法，其复除，折而下，以三乘所得数（商×借算）置中行，复借一算置下行，步之，中超一，下超二等，" 分别是上引文献第（3）段所说立体 DA，DE，DC 体积，在刘徽注中则称 $BC\times AB^2$ 为方，$AB\times BC^2$ 为廉，DC 即以 BC 为边的立方体为隅。所以，东西方对同一数学课题的研究在空间上及时间上都相隔如此遥远，但所取几何模型却很是合拍。

## 三　卡瓦利里原理

卡瓦利里（B. Cavalieri，1598－1647 年）于 1635 著论文《连续体不可分量的几何学》把面积视为构成图形的不可分的线段之和，把体积视为平面图形之和。论文中叙述如何通过比较不可分元素用别的已知面积（体积）的图形来度量图形的面积（体积）。在 D. J. Struik《数学文献汇编》中载有卡氏总结的原理及其自证，我们译出并分段落。

卡瓦利里原理　如果两平面图形作在二平行直线之间，又作任意直线与所作二平行直线各有等距离，而为平面图形所限制的线段处处相等，那么这两平面图行〔面积〕相等。如果两立体图形作在二平行平面之间，又作任意平面与所作二平行平面积有等距离，而为立体图形所限制的平面图形面积处处相等，那么这两立体图形〔体积〕相等。

证明

（1）设在二平行线 PQ，RS 间作任意两平面图形 ABC 及 XYZ（图 3）。在 PQ，RS 间又作

二平行线 DN，OU，在直线 DN 上限制在两图形间的线段 JK，LM 相等，直线 OU 上限制部分 EF，GH 合并起来等于 TV（从例中界线 EFG 可见图形 ABC 是空心的)。假设一切与 PQ 等距离线段上都发生相同情况，那么这两图形 ABC，XYZ〔面积〕相等。

(2) 在 ABC，XYZ 图形中任取其一，不妨取 ABC 界于平行线 PQ，RS 之间的图形 ABC 叠置在另一图形 XYZ 上，并使 PA，RB 落在 AQ，CS 上，那么整个图形 ABC 与整个图形 XYZ 合同，(因为这样，二者合同，二者相等)，或者不合同，那么使某些部分如 ABC 上的 XMC′YThL 与 XYZ 的 XMC′-YThL 上合同。

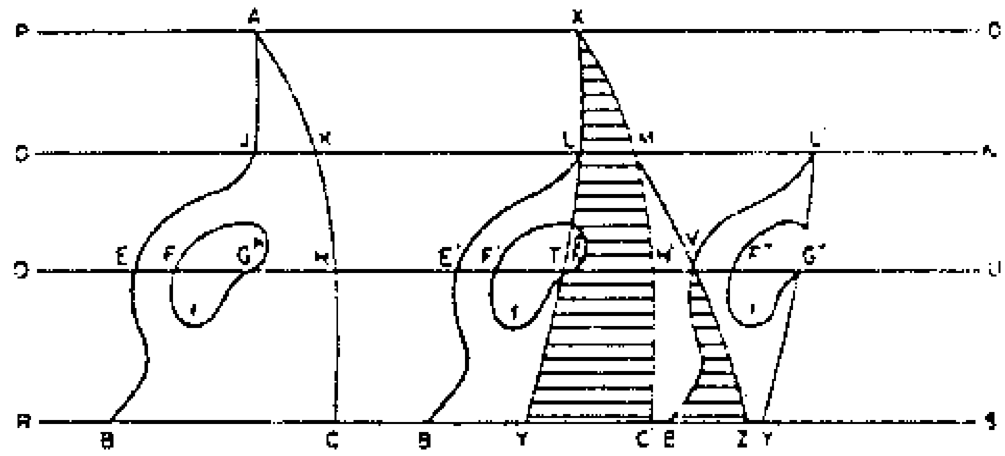


图 3

(3)这说明限制在二平行线 PQ，RS 间的图形当互相叠置时限制在图形中的线段无论如何仍留在这条直线上，例如 EF，GH 在直线 TV 上，经过叠置后，它们仍旧留在这条直线上，(即 E′F′，G′H′在 TV 上) 因为，EF，GH 与 PQ 的距离都等于 TV 到 PQ 的距离，所以不论 PA 在 AQ 上任何位置叠置多少次，EF，GH 永远留在 TV 上，这明确地说明不单这一直线上是如此，与 PQ 平行的一切直线上都是如此。

(4) 如果图形 ABC 的部分（不是全部）与 XYZ 的部分合同，则命题可证明如下：由于平行于 PQ 的直线是任意引的，限制在两图形间的线段既仍留在叠置后的直线上，而且根据假设在叠置前二者长度相等，因此在叠置之后限制在两图形间的线段仍相等，例如 E′F′，TH′之和等于 TV，如果 E′F′，TH′之和与 TV 不合同，则而某线段的一部分合同于另一线段的一部分，如 TH′与 TH′本身合同，于是 E′F′等于 H′V。E′F′在叠置图形 ABC 的余形上，而 H′V 则在被叠置图形 XYZ 上。用同样方法证明任一与 PQ 平行的直线为叠置图形 ABC 余形（例如 LB′YTF′）限制的线段对应有一条为被叠置图形 XYZ 的限制的线段，所以经过如此叠置变换，叠置图形如有剩余，被叠置图形必有空缺。

(5) 再说限制在叠置图形 ABC（或 XB′C′）余形中的每一条平行于 PQ 的线段对应有另一条，在同一直线上，且限制在 XYZ 余形中的线段，这就说明两余形是介乎相同平行线之间的，因此 XYZ 的余形 Thg，MC′Z 也是在 DN，RS 之间，由于平行于 PQ，RS 的每一条直线，限制在两图形中的线段是相等的，因此两余形具有 ABC，XYZ 同样的条件，因此它们相等。

(6) 现在使两余形叠置，又两平行线 KL，CY 落在平行线 LN，YS 上，而图形 LB′YTF′中的 VB″Z 合同于 MC′Z 中的 VB″Z，我们如上可证二者余形也介乎相同二平线间。设 L′VZYG′F′是属于 ABC 的余形，而 MC′B″V，Thg 是属于 XYZ 的余形，二者都在 DN，RS 之间，如把余形再次叠置，并使平行线两两叠置，假使这种变换继续进行直到 ABC 完全叠置，我认为 ABC 将完全复盖 XYZ，否则 XYZ 有空缺未被覆盖，ABC 上也将有剩未覆盖，这是不可避免的。但是 ABC 是保证完全覆盖在 XYZ 上，因此它们互相叠置而没有任何余形，因此它们相互合同叠置，因此 ABC，XYZ 相等。

(7) 现在我们假定在同图中 ABC，XYZ 是介乎二平行平面 PQ，RS 的两立体图形，DN，OU 是与所说平面等距离的任意二平面，其一（DN）限制在两立体间的平面图形 JK，LM 相等，另一（OU）限制着的平面图形 FE，GH 之和（根据截面 FfGg 知在例中立体 ABC 中有空洞）等于 TV，那么这两立体〔体积〕相等。

这是因为如果我们把在 PQ，RS 二平面间 PA、RC 与 ABC 叠置在 XYZ 上，平面 PA、RC 分别落在 PQ，RS 上，我们将证（有如上面介乎平行直线 PQ，RS 间限制于平面图形 ABC，XYZ 的线段那样）在同一平面上的立体截面在叠置后仍留在这平面上，因此在叠置两立体中对应截面都相等且平行于 PQ，RS。

除了两图形合同而外，叠置〔变换〕中会产生余形，彼此不能合同，在所给例中，图形 E′F′，TH′等于图形 TV，除去公共部分 TH′，其余形 E′F′对应于余形 H′V，这种情况同样产生在平行于 PQ 平面的为 ABC，XYZ 所截的任一平面图形中，因此一个立体中有余形，在另一立体中有相应的余形，这很明显，正如本命题在处理平面问题那样，两立体的余形或其和总在相同平行平面如 DN，RS 之间（如余形 LB′YTF′，MC′Z，Thg 在 DN，RS 二平行平面之间）而且彼此相等。

如果这些余形再次叠置，使平面 DL 落在 LH 上，RY 落在 YS 上，继续这种叠置变换，直到 ABC 完全叠置在 XYZ 上，否则 XB′C′（或 ABC）某处有剩余，XYZ 某处就有空缺。但这是荒谬的，因为已假定 ABC 是完全叠置在 XYZ 上，因此两立体并没有任何余形，因此它们将合同．因此所说图形 ABC，XYZ 互等，证毕。

读卡瓦利里原理及其证明后有以下看法：

其一、卡瓦利里原理至今列入立体几何教科书，在中学教学中运用很是方便：不动用牛顿——莱布尼茨公式可以推导某些立体体积，但是好些书刊对卡氏原理有误引[1][2]，把卡氏原理中"处处相等…则图形相等"说成"处处有相同比……则图形有相同比"。其实刘徽注《九章》，在论商功章圆锥、圆亭（圆台）体积公式时说："圆锥比于方锥，亦二百分之一百五十七，""从方亭求圆亭，亦犹方幂中求圆幂。"又在注少广章合盖与外切立方体时说："合盖者、方率也；丸居其中，即圆率也"。刘徽的理解较卡氏原理有进一步认识，即："同高平面所截两立体截面积处处成定比，则两立体体积之比等于定比。"后来祖暅之总结成文"缘幂势既同、则积不容异"，我们称为刘祖原理[3]。这就是说卡瓦利里原理是：如 $f_1(x)=f_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，则 $\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b f_2(x)dx$ 而刘祖原理是

$$f_1(x)=kf_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b,\text{则}\int_a^b f_1(x)dx=k\int_a^b f_2(x)dx。$$

中国在一千多年前言简意赅地道出较卡氏所说更一般的原理。

其二，我国刘徽所创出入相补原理对平面图形中的直线及其面积理论是完备的、出入相补原理与刘祖原理在一起对多面体中来说其体积理论也是完备的。[4]出入相补原理是指一个平面图形从一处移置他处面积不变，把图形分割成若干块，部分面积之和等于原来图形的面积．立体图形也可以作相应的理解。如此说，在卡瓦利里原理证明过程中对图形辗转叠置、逐步分离，图形的公共部分及其余形，正是出入相补原理应用的深化；从平面上的直线形发展到曲边形，从立体中的多面体推广到曲面体。

其三、卡氏对其原理的证明有卓见，先平面（第 1 至 6 段），后立体（第 7 至 10 段），循

序渐进。他利用图形特点，经过叠置变换，一次又一次地移去公共部分，逐步缩小矛盾，终使满足题设条件：限制在二平行直线（平面）间的两图形完全覆盖为止。在证明过程中他明智地指出在这种特定条件下的叠置变换，每次变换前后、被叠置线段长度（第5段）、图形面积（第7段）不变，位置在原直线（第3段）或原平面（第8段）上。从而推断每次叠置后余形相等，而且仍介乎二平行直线（第5段）、或平行平面（第7段）之间，作为证明中的警句是："叠置图形如有剩余，被叠置图形必有空缺"（第4段）。但是卡瓦利里证明是有缺点的，在第6段及第10段他用反证法由因及果，他各连用三个因此引出命题结论。如所周知，反证法是揭露命题结论不真之伪。而在证明中卡氏把命题不真看成："否则 XYZ 有空缺未被覆盖，ABC 上将有剩余未覆盖"，这样看法是失误的，因为 ABC 既有所剩，XYZ 又有所缺。这不是命题结论不真（不能完全覆盖，而是证题者叠置变换不够彻底，应该继续叠置使图形无所剩余也无空缺。卡氏还把结论不真所引起的矛盾引向："但是 ABC 是保证完全覆盖在 XYZ 上"把结论误为假设，倒果为因，又一次失误，我们认为在卡氏证明中第6段有关反证法的论述应改为："……直到 ABC 完全覆盖，我认为 ABC 将完全覆盖 XYZ，否则在某一平行于 PQ 的直线，如 MN，近旁、XYZ 上还有空缺，而 ABC 上却已完全覆盖，两种情况都导致直线 MN 限制在 ABC 内线段与限制在 XYZ 内线段不相等，与命题假设矛盾"第10段应作相应改写。

## 参考文献

〔1〕C. H. Edward，《微积分发展史》（张鸿林译），1987，北京出版社。
〔2〕C. B. Boyer，《微积分概念史》（李锐夫等译），1977，上海人民出版社。
〔3〕吴文俊："出入相补原理"，《中国古代科技成就》，1978，中国青年出版社。
〔4〕吴文俊："近年来中国数学史的研究"，《中国数学史论文集》（三），1987，山东教育出版社。

# 羌族数学史初探

周开瑞
（西南民族学院）

## 引　言

羌族是我国最古老的民族之一。在古羌人生活过的河湟地区发掘的新石器时代文化遗址，证明了羌族有十分悠久的历史，从炎黄到禹汤，部分羌人进入中原与其他部族长期交融，逐渐成为中华民族的祖先—华夏族，秦汉以后，部分羌人被迫向西南迁徙，逐步进入四川岷江上游地区定居下来，成为目前我国仅有的羌族聚居区。羌族主要分布在阿坝藏族羌族自治州，共十万零五百余人。茂文县是羌族主要聚居地区，有羌人六万二千余人，约占该县人口的78.7%，他们至今仍保留了羌族古老的文化传统。

羌族自称“日玛”(Zma)，是一个无文字有语言的民族。羌语属汉藏语系藏缅语族羌语支。羌人在长期与汉人交往中，两族文化交融至深，独特的羌文化虽有部分保留，但已为数较少，特别是羌族数学史料更难发掘，近来我们深入茂汶、汶川两县作初步考察，现将所得资料分述如下。

## 一　数的概念

据1934年编成的《汶川县志：语言篇》所载，汉文数码与羌语数码读音有如下对照：

汉文：一、二、三、四、五、六、七、八、九、一十、一百、一千；

羌语：阿、倪、星、止、喔、主、喜、铠、顾、阿脚、阿克、阿朴。

笔者访问茂汶县沙坝区七十多岁羌族老人苏泽配时，他用羌语读出数码的音与《汶川县志》所记很相近。现用汉语拼音字母注释如下

汉文：一、二、三、四、五、六、七、八、九、一十、一百、一千。

羌语：a、na、tsi、zi、wei、zhu、xi、kai、gu、ajiao、akei、aritu。

二十读如“倪脚”，三十读如“星脚”，四百读如“止克”，五千读如“喔朴”、九千读如“顾朴”等。古羌人已采用十进制，所以十一，二十一等都用叠加读音。

调查时发现一种不同观点，认为古羌人最先用手指与脚趾一齐算数，从一到二十各个数码都有不同的读音。可是，十进与二十进混合制实际使用不方便，才逐步改写全用十进位制。

羌语有没有万的概念是个有争议的问题，历来认为羌人数数只能到千位数，可是茂汶中

学羌族老师周兴富所录磁带中把“一万”读作“阿洛”(Aluó)。此外，在甲骨文上发现的最大数字是三万。据史料记载，商王朝称羌族部落为“羌方”，与之既有交往也常作战，武丁时“辛巳卜，贞登妇好三千，登旅一万，呼伐羌?”商王既用兵一万三千人伐羌，羌人也可用上万兵员与之争战，只不过缺乏记载而已。再者，商羌的经济文化往来日渐密切，商人计数上万，羌人也可计数超越万位。至于一般老百姓不知道“万”的读音，客观原因在于民间日常用万位数的可能性太少，故一般只读到千位数为止。

## 二　记数工具

羌族人最原始的记数工具和方法是用石子、玉米或豆类放在器皿中记数、至今山寨羌族老人用此法记数者亦属不少，此外，也有人用木片作记数器，在上面刻条纹作为记数方法。其记数法如下：

数码：一、二、…、九、十、十一、…，二十，…；

条纹：|、||、…、|||||||||、×、×|、…××…。

据传如果天旱，羌寨每户要派一人到高山“龙池”杀鸡求雨，每到一人，端公就在木片上刻一条纹记数，以便清点人到齐没有。

更有意思的记数工具是一条硬质圆木棍，在其上刻一道圆弧表示个位一，刻一道圆卷表一十。例如甲向乙借了三十二元，就在木棍上刻三道圆圈两道圆弧，当场把圆木从中一劈为二(见图 1)，各持一半。还债时二人各持木棍之半，相互并合，刻痕必须完全吻合，方知借贷数目分毫不差。

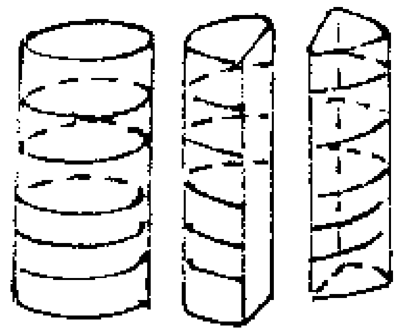


图 1

古羌人也用此法调兵作战，把兵员数目刻在圆木上，双方吻合即可发兵。颇似春秋战国时汉人所用虎符。还可在圆木上附加鸡毛、海椒或木炭，分别表示军情紧急的不同程度，如遇军情十分危急、就把三者同时附上，明朝朱纨在浑水、浅沟、深沟调羌族士兵的诗句有：“遍传木刻到松州”。可见它既是兵符，也是计数工具。

## 三　数的运算及计算工具

羌人能进行整数加减运算，这在羌族地区是一致公认的事。在日常生活中，最先是对具体事物作加减运算，例如，三升豆子加上二升豆子等于五升豆子，按羌语说法译为汉语意即“把三升豆子同二升豆子放在一起，就与五升豆子相同”。沙坪区七十多岁老人王万德、苏泽配都能用羌语讲整数加减运算。他们把“加”读作“格打”，“等号”读着“呀鸣六依俗”。于是“三加二等于五”，读作“黑西格打倪呀鸣六依俗吾唉。”“减号”读作“啊特”，所以“七减六等于一”读作“喜啊特主呀鸣六依俗阿”。羌族有所谓“十里不同乡”的说法，即是说，各村寨语言风俗习惯大同小异。因此，各地加减运算的读音也不尽相同。(注：有录音磁带可供参考)。

羌族无文字故无笔算，也没有算筹或算盘，没有自己的独特的计算工具，一般是就地取

石，当作计算工具。

如果计算者身边有各种谷物，便可分别选作十进位各种数码。比如用黄豆、玉米、大白豆、洋芋分别代表个、十、百、千位数。对算式：3456＋2138＝？可作如下运算，先取6颗黄豆，5颗玉米，4颗大白豆，3个洋芋代表被加数；再取8颗黄豆，3颗玉米，1颗大白豆，2个洋芋作为加数，与被加数放在一起，再分类数数，共有5个洋芋，5颗大白豆，8颗玉米，14颗黄豆，再用1颗玉米换出10颗黄豆，最后分类计数得和数为5594。

如果只有两种谷物却要作四位数运算，便可用两位数分组进行，例如要求1456－456＝？这时可取黄豆作个位数，玉米作百位数，取14颗玉米和56颗黄豆表被减数，运算时只要从中取出4颗玉米和56颗黄豆，剩下10颗玉米即为差数。注意结合心算定位，10颗玉米表10个100，故所得差数为一千，而非一十。

最常用的计算工具是石子，可用小石子作个位数，大石子作十位数，算法与前相同。还有一种说法是在地面划一横线，线上方的石子以一当五，线下方石子以一当一，结合前面方法运算，此法很象珠算。熟先熟后，尚待查证。

历来认为羌族没有自己独创的乘除法运算。徐金原曾说：“夷人于算数一道，最为苯拙，仅知有加减不知有乘除”。对此说有两种不同的看法，一种认为羌族祖先会用连加法作乘法，但讲得不具体，这次还发现另一种有趣说法，羌人会用石子和木棍作乘法运算。例如求35×23＝?，可作如下如算：

(1) 取木棍表个位，石子表十位，排列如图2。

(2) 先用乘数个位3根木棍乘3个石子得9，放9个石子在十位数下；再用3根木棍乘5根木棍得15，在十位处放一石子，个位处放5根木棍（如图3）。

(3) 去掉乘数的3根木棍，并把积的十位数的十个石子去掉，在百位处放一个石子（见图4）。

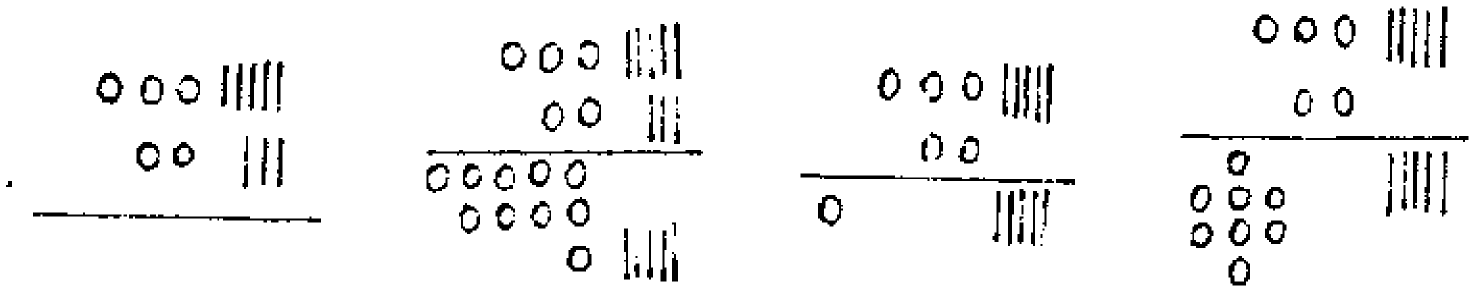


图2　　图3　　图4　　图5

(4) 用2个石子乘3个石子得6，放6个石子在百位处。用2个石子乘5根木棍得10，又在百位处放一个石子，十位处空格，个位处5根木棍不动。最后数得百位处8个石子，十位数为0，个位数5根木棍，故积为805，此法很象筹算，其产生时代尚待进一步考证。

## 四　计量方法及单位

（一）长度计量及单位

羌族人民有四种计量长度的单位。

第一种叫“卡”。羌语读作“a：du”或“du”。成年人伸直大姆指与中指，两指尖中间的距离是一卡，长约5寸。

第二种叫"步"。羌语读作"æ'dʒæ"，即成人正常步子跨一步的距离，长约2市尺。

第三种叫"排。"羌语读作"a：ʒi"，成人两手平伸，两中指指尖中间的距离是一排，约5市尺。

第四种叫"绳"。羌语读作"mbre"。即长约六丈的绳子的长度，这是最长的度量单位。羌寨中常有人说："太阳升起几绳了"，"太阳还有一绳高就要下山了"等等。

这几种长度可换算如下：

1绳＝12排；　　1排＝2.5步＝10卡；

1步＝4卡

步、卡、排三种单位，汉、羌民间都有应用。

（二）容积单位

羌人用石、斗、升三种容积单位，与汉人所用名称相同．但换算却不同。一羌石等于二十斗．一斗等于二十升，一羌升青稞重约四斤。汉人石、斗、升是十进制，一汉升青稞重约三斤。羌人还有一种独特的量器叫"tʂɔ"或"nɔ"。汉语译为"桶"。一桶等于4升，一桶青稞重约16斤。

（三）面积单位

羌人丈量土地面积不用亩，而用石、斗、升代替。老农按正常步子把一升青稞均匀撒完，所占土地面积就叫一升地，一汉亩约等于1．2斗地。

（四）计算行程单位

羌人用燃香来计算路程，成人步行十里恰好燃完一根香，所以两地若相距30里，民间则说相隔三根香的路程。

（五）时间单位

一根香大约要燃一小时，因此也用几根香来表示时间的长短。

羌族地广人稀，生产和科技不很发达，对度、量、衡的精确度要求不高，所以计量单位都不很精密。

## 五　几何知识

羌族人民的几何知识主要见于生产、生活应用之中，没有精确的计算公式，关于几何定义及命题的逻辑推导，更无可考。

茂汶县博物馆珍藏的茂汶出土文物是羌族古代文化的见证，下面是有选择地仿描出若干有代表性的几何图案。

（一）古羌人新石器时代的彩陶片有绳纹片与弧纹片（见图6，a，b）及石凿，石斧。

（二）春秋中晚期有各种陶盘、陶环、双耳圜底小罐、单耳乳丁罐及铜镞、铜管、铜泡、骨管等。

（三）战国时期有青铜剑、铜戈。有一个铜戈上有很规则的对称图案（图7）。还有一面铜镜，背面有对称规整的六个双棱菱形，构成很好看的图案（图8），镜柄处还有一条钮曲线。

（四）秦汉时期有个双耳罐，上部有一尖嘴，两个大耳朵，颈上有两圈纵条纹路。罐的正面两边对称排列着一对颇似阿几米德螺线的图案，可见羌人高超的作图技巧和审美情操（见

图9）。它是一个罕见的珍品。另有一绳纹圜底罐，图案是由波浪线和弧线组成（图10）均匀而流畅。

有个双耳罐的耳朵一大一小，却也别具一格，另有个三耳乳丁罐，反映当时工人能制造三耳必会三等分圆了。此外，还有各种陶俑如武士俑、抚耳俑、吹箫俑、陶鸡、鸭、猪、马、羊、陶船、陶房等等实物，几何造形已很复杂。

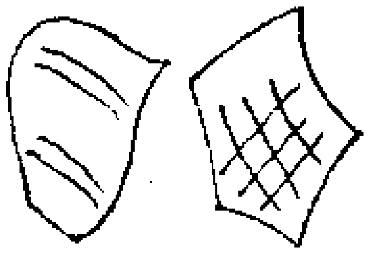


图6

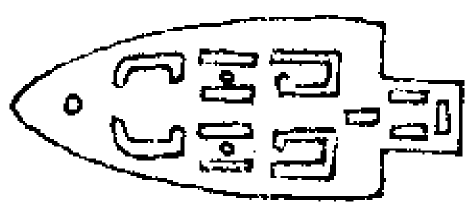


图7

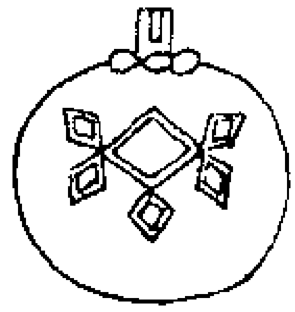


图8

还有几块茂汶出土的古砖，上面有丰富多采的几何图案（图11），它由以下多种几何图案组成：正方形、矩形、平行四边行、菱形、圆、平行线、弧及流畅的波纹曲线等。有的图形结构对称精美，有的不对称却很雅致，这些砖与汉人地区发现的汉砖很相似。

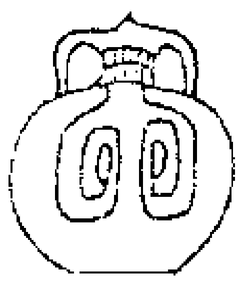


图9

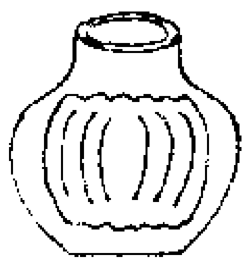


图10

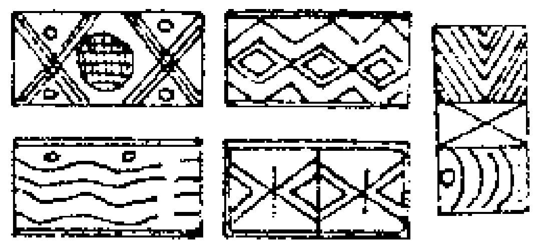


图11

唐宋以后的文物与汉族同期文物十分相象，就不一一列举了。

茂汶一带春秋战国时代文物，多从"石棺葬"出土，石棺用六块页岩板砌成。笔者所见石棺群排列有序，但却被挖得残破不堪。据称石棺葬随主人生前地位高低，其结构有繁简之别，随葬品多寡不一。石棺葬中发现的铜管、双耳罐等与卡约文化的同类器具十分相似，可能羌族古代文化是承袭了河湟地区汉人卡约文化。

（五）挑花刺绣是羌族著名传统工艺美术，有反映生活的动植物及人物的形象，也有各种复杂的几何图案，已运用了中心对称与轴对称的原理。

## 六　科学与原理

羌族人民有独特风格的建筑工艺，包含着许多有待研究的科技与数学问题。

（一）精湛的建筑艺术

在岷江河谷遥望群山中的羌寨，栉次鳞比的住房和高耸入云的碉楼，宛如名画中的古堡，无比美丽壮观。山区羌民住房依山修建，三五家或数十家聚居为寨。房屋多为三层，用黄土碎石筑墙，墙的纵剖面非矩形，而是内直外略斜的直角梯形，这也许是出于使泥片土墙更坚固耐久的需要所采用的几何图形。每层开两个窗户，窗口外小内大，由于墙厚故窗口如横放的正棱台，利用御寒防盗。

羌寨都有若干碉楼，其主体图形有如正四棱台、正六棱台及正八棱台几种。楼高十余丈，

多至十三、十四层，而底面积只有十来平方米，碉楼也用碎石黄泥构筑，高与底的比值很大，突兀耸立于山间，久经风霜而不倒。可见建筑者善于运用许多力学、数学原理和经验公式，他们记于脑中，师徒相传，应用自如，只可惜缺乏文字记载。

（二）溜索与索桥

岷江上游两岸悬岩绝壁，水流湍急，无舟可渡，无桥可过。古羌人用碗口粗的竹索系于两岸，一高一低，渡河人吊于索上滑向对岸，用高低反向二索，可往返渡河，这叫溜索。现仍用有于货运，但已不用来渡人。

溜索的进一步发展是索桥，现在岷江两岸钢缆索桥比比皆是。羌人约一千四百多年前就会建造竹索桥。茂汶城边还保留了一座，两岸桥头各有石砌拱门一座，内有粗木柱（或石础）用来固定碗口粗的竹索，在一排平行竹索上，平铺木板，供人畜通行。两旁排列分力护卫的粗竹索共约二十多根，悬于河上呈悬链线，人行其上来回晃动不已。造桥要选定竹索的粗细及根数及其固定物——石砌或木舂的大小及根数，必须计算通过物体的重量及振动所产生力的大小，可见羌族人民早有丰富的力学知识和高超的计算能力。

（三）无影塔

茂汶县城内有一座高约数丈，边长丈余的石头雕砌实心方塔。根据羌族耆老的介绍，这座塔在原建筑地址，终日塔影极短，颇似“无影”。塔的建造者极巧妙地选择塔址，精细设计与计算了塔基面积与塔高的比例关系，使得早晨与黄昏塔影长度与中午的影长相差无几，似乎此塔终日无影，不难看出设计和建筑此塔的人，对天文、数学及建筑艺术都有极高的造诣。后来因为修商店，把塔迁移后已失去“无影”的特色，而且永无复原的可能，这实在是一大憾事。

## 七　生活中的数学

羌族人民制造生活用具中也蕴含了许多数学知识和许多几何图形。木匠做桶时有两个口传下来的公式，其一是“一尺围圆三寸三”。即做周长一尺的圆，取直径为三寸三，其二是“一尺为圆三尺三。”即用一尺为直径的圆，其周长为三尺三寸，设D为直径，C为周长，则有公式$C=\pi D$，这已是现代的公式，不过前者取$\pi=3$而已，这同汉人秦以前的《周髀算径》中所用的“径一周三”完全一样。π值计算的精确度，自然可反映一个民族的数学水平。

古老的羌寨中，几乎每家都有一个火塘，四周用木板或石条围成正方形，烧饭烤火兼用。火塘中央放一个大火圈，羌语叫“希墨几”（图12）。讲究人家在铜圈上刻有花纹图案，既是炊具又是工艺品，铁匠铸造一个宽约3—4寸，直径约三尺的铜（铁）环，在三等分处焊上三个脚架，并向中央伸出一节支架。水壶或铁锅放在支架上就可以烧水煮饭。铁匠制造铁三角（火圈）时已懂得三点定一平面的原理，并有三等分圆的实践技巧了，此外舂米的杵、臼造形有圆柱、圆台、椭球体等立体几何图形。

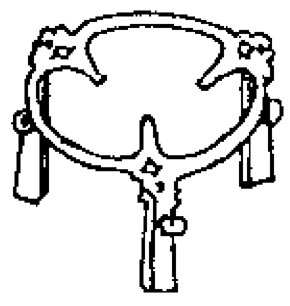


图 12

羌人在修栈道，掘井筑堰等建筑工程及其他生产生活实践中还涉及了广泛的数学问题，有待进一步开发研究。

羌族是有着悠久历史与灿烂文化的古老民族，由于没有文字，故科技史料流传甚少，而

临失传危险，急待一批有志有识之士为抢救羌族科技文化，使之在祖国文化史上占据其应有的地位而献身！

## 结束语

根据以上资料初步分析，羌族数学知识只相当于初等数学早期的水平。羌语中有万以下的数词及整数加、减和乘法运算，没有除法、分数及小数的概念和运算。在解决生产和生活的实际问题中形成了各种计量方法，并有各种几何图形的应用，但没有图形面积，体积的一般计算公式及几何命题的逻辑论证，也没有代数、三角等知识。总的来说，现已发现的羌族数学尚未达到汉族《周髀算经》水平。羌族数学的特色是重视实际应用而不重视理论研究，这与春秋以前汉族数学颇为相似。从汉朝到宋、元时代，汉族在代数、几何方面有很大发展、创造了许多领先于世界的卓越成果。但迄今，尚无资料显示羌族数学进一步发展的踪迹及所达到的新水平。

本文承我院民族史副研究员陈忠祥，羌族史副研究员陈泛舟，数学系郑克明副教授，甄仲泰副教授等同志审阅，在此一并表示谢意。

## 参考文献

〔1〕冉光荣、李绍周、周锡银：《羌族史》，1984，四川民族出版社。
〔2〕编写组：《阿坝藏族自治州概况》，1985，四川民族出版社。
〔3〕周兴富：《羌族古代数学文化遗产订考》（待发表）。
〔4〕徐金源：《川边游记》。

# 中国古代历法中的上元积年计算

曲安京
（西北大学数学系）

## 一

上元的选择相当于推求若干个同余式的解，如果从上元起算的历法项目参与这个推算，则对于多达10个联立的一次同余式，将面临无法逾越的技术性障碍，确定上元的先决条件是什么？

在中国古代历法中（元代《授时历》之前），把历法的起算点称为上元，从上元到所求年的累积年数，称为上元积年。

上元的选择不是随意的，通常把11月甲子日夜半合朔冬至这个特别的时刻定为上元之始。与此同时，月亮经过升交点，五星毕聚冬至点与太阳会合，称做“日月如合璧，五星如连珠”，刘洪在《乾象历》中又进一步引入近点月计算，从而要求月亮在上元之始行至近地点，在祖冲之《大明历》中，对理想上元的追求达到了登峰造极的地步，除上述条件之外，《大明历》上元所在年的岁名亦为甲子。

如此上元，不借助一定的数学手段，便难以确定，由于上元积年的确定，各个历法事项方得以安排，遂使得上元的推求成为治历的一项重要内容。

鉴于历法中各个项目几乎全部从上元起算，所以上元的选择，直接关系到它在应用时的精确程度，治历者必然潜心构算，不敢懈怠。

至少从刘洪《乾象历》开始，历书开篇第一句便是“上元某某以来，到某某年某某，积某某年”，用上元积年统贯全书，确立了上元积年无可争议的核心主导地位。

陈遵妫先生认为“一部中国历法史，几乎可以说是上元积年演算史”[26]意在强调上元积年所处之煊赫地位，此说或许偏颇，但却不无道理。

元代郭守敬《授时历》(1280）废除上元，导致积年之法湮没不彰，鲜为人知，洎至清乾嘉时期，在复古思潮的驱动下，出现了以张敦仁、李锐、沈钦裴、宋景昌等人为代表的中算家，着手研究和发掘整理古代历算遗产，竟成一时风尚。

其中对上元积年研究最可称著者，首推张敦仁（1754—1834），他在《求一算术》一书，采用秦九韶《数书九章》中所创大衍总数术（即中国剩余定理）及演纪术两种不同方法，对《麟德历》等数部历法的上元积年进行了实例演算，为后人更深刻地认识上元推算的内在机制，提供了一份甚足珍贵的范例。

然而，张敦仁在具体运算中，所选择的冬至时刻（余数 $R_1$）与合朔距冬至时刻（余数

$R_2$）都不须调整，直接入算便得出结果，显系既得数据的还原运算，并不能真切地、完整反映实际情况。

这引出了一次同余理论的可解性问题：一组联立的同余式，欲保证有解，必须使其余数R满足一定的条件。

演纪术本身具备选择余数R的功能，但张敦仁的算例中并未很好运用，总数术在这一点先天不足导致了秦九韶刻意设计的“古历会积”一问错误百出。

沈钦裴、宋景昌师徒在对《数书九章》的校勘中，十分敏锐地揭露了秦氏所犯错误之症疾所在，这一发现提醒人们总数术在上元推算中的应用产生疑问，引发了上元积年计算方法上的总数术论与演纪术论之争。

清代学者的工作，所考虑的先决条件均不超过四次：日名，岁名，回归年与朔望月，其它历法项目诸如五星会合周期，交食周期，近点月，一概不提，基本上是对秦九韶《数书九章》的介绍与订正，虽然建树不多，但荜路褴褛，开辟草莱之功不没。

二十世纪初叶，日本人新城新藏对现存第一部中国古历《三统历》的上元积年进行了推算[25]，其视野涉及木星会合周期，他利用刘歆所创岁星超辰说，按太初元年（B. C. 104）前11月甲子日朔旦冬至，岁在星纪之次，以及“三统上元与太初元年岁名俱为丙子”诸条件，列不定方程：

$$N=4617\times p=1728\times q+(60n+x)\times 144/145$$

其中N为三统上元太初元年积年，4617为三统元法，1728为三统岁星大周岁数，x为小于1的分数，表示太初元年岁星所在位置，p，q，n为待定整数。新城新成藏据此推算，得一组答数：

$$p=31,\ q=82,\ n=20,\ x=135/144$$

适与三统上元积年相合。

70年代末，李文林、袁向东著文讨论汉历上元积年计算，指出新城设法不合实际，其理由之一，认为假设三统上元岁名为丙子的前提是不妥的，同时新城没有利用《汉书律历志》所载（太初元年）“岁在婺女六度”，致使未知量过多，设算滋繁[45]。

李、袁按岁星超辰法及上述数据，列不定方程：

$$4617\times 145\times p=1728\times q+r$$

其中$N=4617\times p$，p，q为待定整数，由“岁在星纪婺女六度”推得$135<r<139$，由此得到最小正整数解：

$$p=31,(q=12010),r=135$$

亦与三统上元相合。

他们还依据岁星超辰法，推算了古四分历，后汉四分历的上元积年，但均没有说明除岁星外的其他行星会合周期与交食周期是如何与其上元相配合的。

在中国古代历法中，可能与上元有关并相互独立的项目总计11项：日名、岁名、回归年（T/A）、朔望月（B/A）、交点月（J/A，或交食周期，或交点年）、近点月（G/A）、五星会合周期（$M_i$/A，i=木，火，土，金，水）。

它们如全部与上元有关，则可以列出10个联立的一次同余式：

$N_0 \equiv R_0 \pmod{60A}$　　$R_0$为所求年岁名序号；

$TN_0 \equiv R_1 \pmod{B}$　　$R_1$为所求年冬至时刻分数；

$TN_0 \equiv R_2 \pmod{60}$　　$R_2$为所求年冬至距 11 月合朔时刻分数；

$TN_0 \equiv R_3 \pmod{J}$　　$R_3$为所求年冬至距前一交点月起点之分数；

$TN_0 \equiv R_4 \pmod{G}$　　$R_4$为所求年冬至距前一近点月起点之分数；

$TN_0 \equiv R_i \pmod{M_i}$　　$i$=木，火，土，金，水

$R_i$分别为所求年冬至时刻距行星与太阳前一次会合之日的分数。

前面提到，在上元积年计算方法上，存在着两种不同的观点，一种主张演纪术说，即按代入法依次递求解同余式组，如开禧三年，大理评事鲍浣之声称："至于李淳风、一行而后，总气朔而合法，效乾坤而拟数，演算之法始加备焉"。[18]张敦仁认为"唐麟德以后……皆用纪术（演纪术）推求上元积年"[30]，朱文鑫亦称"唐宋历家皆以演纪法推积年"[33]，李继闵最近著文分析和论述了演纪术比之总数术在算法上的实用性及可行性[41]。

查唐宋历法，几乎均注有"演纪上元……"字样，由于秦九韶所处时代，上元积年仍然施行，因而《数书九章》所陈"演纪之术"当不是无中生有，演纪术用于推上元积年可谓证据确凿。

但是，按代入法，依次求解 10 个全部由天文数字构成的同余式，只消计算前三个方程即将上元基本确定，（其模数基本上已超过上元积年数），其余同余式便不复有参与运算的机会，形同虚设。

这恐怕算是演纪术说不得流行的原因之一吧。

大部分人士主张采用大衍总数术，这种方法早在公元四世纪的《孙子算经》中已俱雏形，故亦称孙子定理，钱宝琮认为"《孙子算经》'物不知数'问题解法很可能是依据当代天文学家的上元积年算法写出来的，…大约在三世纪中历法工作者开始应用剩余定理计算上元积年"[35]。

由于总数术从总体上处理全部同余式，因而避免了演纪术所提出的问题，加之总数术理论完整，程序精炼，在中外数学史界备受青睐，故而总数术说不胫而走，流传广泛，深入人心，为众多天文学史或数学史论著所援引。

但是，总数术缺乏演纪术自行选择可用余数 R 的功能，加之一次性同时处理众多的天文数据，具体运算中统将成为难以克服的技术性困难，爰不得定论。

李迪认为"从三统历开始，在编制历法时都要设'上元积年'，有时附加条件很多，不知如何计算…祖冲之大明历中的上元积年…要解 11 个同余式的同余式组，（注：按大明历上元所参与项目，只能列出 10 个不相关的一次同余式）不用说一千五百多年前，就是从今天的数学水平来看，解这些的同余式组也不是轻而易举的，古代怎样求上元积年，从数学史的角度来看，是个没有解决的问题。"[49]

由于上元的存在，使得各项周期与之错综杂糅，彼此制约，倘不同时将与上元有关的历

法项目做通盘考察，便难以解开上元积年之谜；而陷于求解10个同余式的泥淖之中挣扎求生，似乎又无法摆脱这个历史成见所形成的怪圈。

于是迫使我们提出如下问题：究竟什么是推算上元的先决条件？凡是从上元起算的历法项目皆参与上元的推算么？

## 二

上元积年愈演愈烈，但积年数几乎总控制在日名，岁名，回归年与朔望月所构成的轮回之中，其飙涨趋势与上元包罗内容的递增无关。

东汉四分历以后400年间的10余部历法，积年数皆不过数万，这种平静的局面，被北魏张龙祥的《正光历》(518)率先打破，嗣后各历积年数不断加码，A. D. 544梁虞刘的《大同历》上元积年突破100万；A. D. 727唐一行的《大衍历》骤然增至9000多万年。而后历家积年数多徘徊于数千万年，金朝杨级重修大明历(1127)终于将积年数越过界线演至380，000，000多年。

上元积年愈演愈烈的态势，被人们从两个方面加以疏解，其一，由于"天文观测的精密化，计算越来越繁重，求出的上元积年数字也越加庞大，"其二，由于追求理想上元之风日盛，"考虑的项目越多，解也越繁重"[28]

在秦九韶的《数书九章》天文类问题中，无论按总数术还是演纪术推演的算例，均只以日名，岁名，回归年、朔望月为先决条件。

在上元积年的推算中，除岁名外的其他三个条件必然参与运算，古代将这三个条件所确定的"十一月甲子夜半合朔冬至"称为历元，对那些以甲子为上元岁名的历法，这四个条件必然全部是先决条件。

古代把日名(岁名)、回归年与朔望月构成的大周期称为元法，取一元复始之意；在废除闰周以前，各历的基本历法数据中多数列有这个项目，尤其在采用古章法19年7闰的历法中，无一遗漏，唐宋历书中，元法不再作为基本数据写入正文，但它依然存在，不过由于闰周的废除，它变得相当庞大，据《大衍历》载，其元率(即元法)为16，374，592，200[15]。

为行文方便，我们将上述四个条件构成的大周期称为元法，以C记之，除去岁名，所构成的周期称为准元法，以C′记之。

按同余式理论，由上述四个条件构成的同余式组的解，以C模数，如果上元积年大于C则应该有其他的条件或原因参与上元的定夺；反之，说明仅凭这四个条件便基本上可以将上元确定。

为此，我们分两个时期，对历史上各部历法的元法C(或准元法C′)与其积年数做一比较。

### (1) 闰周废除之前

唐《麟德历》以前的中国历法，在回归年与朔望月之间规定了一个简单的周期关系，叫闰周，令s个朔望月=a个回归年，称s为章月，a为章岁，于是

$$T/b=(B/A)(s/a)$$

如果朔望月B/A既定，通过(s/a)，回归年T/b同时确定；反之亦然。其中A称为日法，(按：

《四分历》取回归年为 T/A=365. 25，例外)，b 称为纪法。

通常我们有

$$(T, b)=1 \qquad 及 \qquad a|b$$

一纪岁 b 年，合 s (b/a) 个整朔望月，回归年与朔望月的余分皆为零；

60b/(60，T) 年之内，不仅岁分、月分俱终，日名亦复如初；令 C′=60b/(60，T)，是为准元法；

60C′/(60，C′) 年之内，实现日名，岁名，回归年与朔望月之大轮回；令 C=60C′/(60，C′)，是为元法。

因为 C=60C′/(60，C′)=60b/((T，60)，b)，而 (T，b)=1 故有 C=60b。

考察《麟德历》以前的 22 部历法，只有六部历法的积年数超过了它们的准元法 C′（它们的上元岁名全部不是甲子)，这说明这些历法上元的确定必然参与了日名，回归年，朔望月以外的因素。我们可以肯定至少岁星参与了三统上元的推算[45]；东汉四分历与《乾象历》上元含有各自交食周期的因素；《元嘉历》凭空多出一元 C，实属人为忝列，意在扩大其积年数；《黄初历》已佚，情况不明，《戊寅历》或许是羼入了水星或土星的会合周期，导至其积年数突破准元法 C′。

使积年数超出元法的历法，多集中于早期，这表明在采用闰周的历法当中，虽然从《乾象历》开始上元所包罗的项目便不断增加，至祖冲之《大明历》而达到完备，但它与上元积年呈明显递增的趋势无必然联系，诱发积年数上涨的根本原因，是祖冲之以后的历法，革除古章法，扩充闰周，导致纪法 b 的增加，从而引起元法 C 或准元法 C′的膨胀。

### (2)　闰周废除之后

唐李淳风在其《麟德历》中废除闰周，将回归年与朔望月统一在同一法度之下、使得回归年与朔望月从彼此的约束中解脱出来，赢得了相对的独立。

但是，由于回归年 T/A 与朔望月 B/A 皆为一有限的分数，尽管在各自的取值上较之以前有更多的自由度，它们之间仍然存在着一个共同的大周期，只不过不太明显且庞大得多而已。

按日名、岁名、回归年、朔望月等四个条件，可列如下同余式组：

$$N_0 \equiv R_0 (mod\ 60) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$TN_0 \equiv R_1 (mod\ 60A) \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$TN_0 \equiv R_2 (mod\ B) \qquad \cdots\cdots(3)$$

其中(3)式有解的充要条件为

$$(T, B) | R_2$$

其通解为

$$N_0 \equiv f(R_2)(mod\ B/(T, B))$$

代入(2)式，则有

$$TB/m | (T, B) \equiv g(R_1, R_2)(mod\ 60A)$$

上式有解的充分必要条件为

$$(60A, TB/(T, B)) | g(R_1, R_2)$$

联立(2)(3)得其通解为

$$N_0 \equiv f(R_1,R_2)(mod\ 60AB/(60A,TB/(T,B)(T,B))$$

令
$$C' = \frac{60AB}{(60A,TB/(T,B))(T,B)}$$

是为准元法。

如果取
$$C = 60C'/(60,C')$$

则同余式组的通解必为

$$N_0 \equiv f(R_0,R_1,R_2)(mod\ C)$$

此处所取元法C与准元法C′同前述意义相同。

由于闰周的剔除，使得T与B不再拥有巨额公因子，从而导致C与C′急剧增大，伴随而来的结果是上元积年的突飞猛进。

对《麟德历》以后31部历法的上元积年与其各自元法或准元法进行比较，发现只有吴昭素的《乾元历》(981)积年数突破元法C，其余皆不出C或C′之范围。

这同样说明上元积年愈演愈烈，与参与上元事项愈来愈多无因果关系，虽然我们尚不能据此断言，仅凭这四个条件，即将上元唯一确定，但却为我们的猜想化为现实找到了希望之光。

南北朝以来，上元积年与元法同步伸张，而元法的变迁根值于回归年与朔望月表达方式的衍化，这一切与历法中的其他项目似乎没有关系。

通过前面的分析，我们得出的结论是：仅凭日名、岁名、回归年、朔望月四项基本条件，几乎可以推出每一部历法的上元，为了将这种可能性提高到必然性，彻底排除其他历法项目参与上元推算的机遇，需要进一步算理上的结论。

## 三

对四项基本条件构成的同余式组的解集合进行算理分析的结果表明，余数$R_1$，$R_2$在适当空间中随意取值，同余式组将多数历法的上元唯一确定，从而证明这些历法中的其他项目不复具有参与推算上元的可能性。

按同余式理论，不是每一组余数（$R_0$，$R_1$，$R_2$）都能够保证同余式组有解，还可以证明，当余数在给定的空间内任意取值，无论采用总数术还是任何一种次序的代入法求解同余式组，其解集合的元素都是一致的。

与上一节的讨论相对应，我们仍以《麟德历》为分水岭，就两个不同的时期，对余数$R_1$，$R_2$进行适当的限定，具体判别历史上各部历法的四项基本条件构成之同余式组的解集合情况。

### (1)　闰周废除之前

据现有史料，历史上最先采用数学手段精测冬至时刻$R_1$的人是南北朝祖冲之，由于我们的讨论基于对余数$R_1$与$R_2$选择范围之前提，因此只考察祖冲之《大明历》以后情况。(注：《大明历》以前的历法多采用古章法，以特别的方式推算上元。)

由于闰周s/a的存在，使得回归年T/b与朔望月B/A彼此不能独立：T/b＝(B/A)(s/

a)，它们与日名，岁名、共同构成的同余式组为：

$$N_0 \equiv R_0 (mod\ 60) \quad \cdots\cdots(1)$$
$$(T/b)N_0 \equiv R_1 (mod\ 60) \quad \cdots\cdots(2) \qquad (\text{I})$$
$$(T/b)N_0 \equiv R_2 (mod\ B/A) \quad \cdots\cdots(3)$$

其中 $R_0$ 为岁名序号，$R_1$ 为冬至时刻日及余分，$R_2$ 为冬至距 11 月合朔时刻日及余分。

因为 $a|b,(a,s)=1$

所以 $(TA,Bb)=Bb/a=TA/s$

于是(I)式化为

$$N_0 \equiv R_0 (mod\ 60) \quad \cdots\cdots(1)$$
$$TN_0 \equiv R'_1 (mod\ 60b) \quad \cdots\cdots(2)$$
$$sN_0 \equiv R'_2 (mod\ a) \quad \cdots\cdots(3)$$

其中 $R'_1=bR_1,R'_2=(aA/B)R_2$，分别以 b,bA 为一日分数的整值。

假定 $R'_1,R'_2$ 的取值区间和度分别为 $S_1,S_2$，将(1)式代入(2)式，有

$60Tn \equiv R'_1-R_0T(mod\ 60b)$

因为 $(T,b)=1$，所以上式有解的充分必要条件为

$60|R'_1-R_0T$

由于 $R_0$ 不可调整，所以 $R'_1$ 的可用值区间长度将不超过

$S_1^*=[S_1/60]+1$

令 $R_1^*=(R'_1-R_0T)/60$，由 T,b 求得乘率 k，使

$TK\equiv 1(mod\ b)$

于是有 $n\equiv kR_1^*(mod\ b)$

代入(1)式，有 $N_0=R_0+kR_1^*60+60m$

代入(3)式，有 $60bsm\equiv R'_2-sR_0-skR_1^*60(mod\ a)$

因为 $a|b$，所以上式化为 $60skR_1^*\equiv R'_2-sR_0(mod\ a)$

因为 $(k,a)=1$，及 $(60sk,a)=(60,a)$。令 $R_2^*=(R'_2-sR_0)/(60,a)$

于是有 $(60sk/(60,a))R_1^*\equiv R_2^*(mod\ a/(60,a))$

其中 $R_2^*$ 的可用值区间长度将不超过

$S_2^*=[S_2/(60,a)+1]$

上式等价于解如下不定同余方程：

$(60sk/(60,a))x_1\equiv x_2+y(mod\ a/(60,a))$

其中 $0<x_1<S_1^*,0<x_2<S_2^*$，y 为一常数。

由于祖冲之发现了测算冬至时刻的方法[11]，从而为提高余数 $R_1$ 与 $R_2$ 的取值精度提供了客观条件。如果我们把 $R_1$ 与 $R_2$ 的取值范围限定在正负一个时辰，即 1/6 日以内，由于 $R'_1=bR_1,R'_2=(aA/B)R_2$，所以 $R'_1$ 与 $R'_2$ 的取值长度分别为 $S_1=b/6,S_2=aA/6B$ 于是 $R_1^*$ 与 $R^*$ 的取值区间分别为

$S_1^*=[S_1/60]+1=[b/360]+1$

$S_2^*=[S_2/(60,a)]+1=[aA/6B(60,a)]+1$

我们可以具体求出 $S_1^*,S_2^*$ 与 k，通过考察

$(60sk/(60,a))x_1 \equiv x_1 + y(\mathrm{mod}\ a/(60,a))$ ……(4)

可以判定同余式组 I 之解集合中元素个数的上限。

对于不以甲子为上元岁名的历法，我们只须讨论 I 式中的(2)及(3)式：

$$TN_0 \equiv R'_1(mod 60b) \quad \cdots\cdots(2)$$
$$sN_0 \equiv R'_2(mod\ a) \quad \cdots\cdots(3) \qquad (\mathrm{I}')$$

因为(T,60b)=(T,60)，所以(2)式有解的充要条件为

$(60,T)|R'_2$

令 $R''_1 = R'_1/(60,T)$，则 $R''_1$ 的可取值长度为

$S'_1 = [S_1/(60,T)] + 1$

由 T/(60,T)与 60b/(60,T)求得乘率 k′，使

$Tk'/(60,T) \equiv 1(\mathrm{mod}\ 60b/(60,T)$

则有

$N_0 \equiv k'R''_1(\mathrm{mod}\ 60b/(60,T)$

代入(3)式：

$(60/(60,T))sbm \equiv R'_2 - sk'R''_1(\mathrm{mod}\ a)$

因为 a|b，所以上式化为

$sk'R''_1 \equiv R'_2(\mathrm{mod}\ a)$

所以(sk′,a)=1，所以 $R'_2$ 的取值长度不超过 $S'_2 = [S_2 + 1]$

上式等价于

$sk'x_1 \equiv x_2 + y(\mathrm{mod}\ a)$ ……(5)

其中 $0 < x_1 < S'_1$，$0 < x_2 < S'_2$，y 为一常数。

我们仍然把 $R_1$ 与 $R_2$ 的取值空间控制在正负一个时辰，即 $S_1 = b/6$，$S_2 = aA/6B$，则有

$S'_1 = [b/6(60,T)] + 1$，　$S'_2 = [aA/6B] + 1$

我们同样通过对(5)式解集合的讨论，来说明 I′解集合中元素个数的上限。

我们对《大明历》到《戊寅历》的 12 部历法，逐一演算的结果表明，即使将 $R_1$，与 $R_2$ 的误差放宽至正负一个时辰的程度，仍然不能保证所有历法的 I′式皆有解，一味扩展 $R_1$ 与 $R_2$ 的取值空间，，则与治历精神相悖，对于企图选择甲子为上元岁名的历法，往往要经过多次试验，不断调整基本数据，方能取得合用上元，因而推求上元本身，提供了调日法滋长的温床。

如果不肯将 $R_1$ 与 $R_2$ 的误差定得过宽(如我们假定的那样)，且调日法屡试不中，便只好退而求其次，放弃上元岁名为甲子的条件。

无论怎样，这个时期，除《戊寅历》以外，在上元的推算过程中，其他历法项目皆不具备参与的条件。

## (2)　闰周废除以后

《麟德历》以后统一回归年 T/A 与朔望月 B/A 之法度，由日名、岁名、回归年与朔望月构成的同余式组相当于：

$$N_0 \equiv R_0(mod\ 60) \quad \cdots\cdots(1)$$
$$TN_0 \equiv R_1(mod\ 60A) \quad \cdots\cdots(2) \qquad (\mathrm{I})$$

$$TN_0 \equiv R_2 (mod\ B) \qquad \cdots\cdots(3)$$

Ⅰ式有解的充要条件为：

$60(A,T)|(R_1-R_0T)$， $(60T,B)|(R_2-R_0T)$， 及$(B,60A)|(R_1-R_2)$

其中$R_0$为岁名序号，不可调整；$R_1$与$R_2$分别为以A为一日分数之整值，令其取值区间长度分别为$S_1$与$S_2$，我们希望知道$R_1$与$R_2$在给定区间内任意取值，Ⅰ式解集合中元素个数的上限。

由于我们已经证明在$S_1$与$S_2$一定，Ⅰ式解集合元素个数与求解方式之不同无关，因此，我们按代入法依递求解Ⅰ式，将不失一般性。

将(1)式代入(2)式，有

$$60Tn \equiv R_1-R_0T (mod\ 60A)$$

上式有解的充要条件为

$$60(A,T)|R_1-R_0T$$

令$R_1^* = (R_1-R_0T)/60(A,T)$，则$R_1^*$的取值区间长度不超过

$$S_1^* = [S_1/60(A,T)+1]$$

将上式通解

$$n \equiv f(R_0,R_1)(mod\ A/(A,T))$$

代入(1)式，再代入(3)式，得

$$60ATm/(A,T) \equiv R_2-R_0T-60Tf(R_0,R_1)(mod\ B)$$

上式有解的充要条件为

$$(B,60AT/(A,T)|[R_2-R_0T-60Tf(R_0,R_1)]$$

令$R_2^* = [R_2-R_0T-60T\ f(R_0,R_1)]/(B,60AT/(A,T))$

则$R_2^*$的取值区间长度不超过

$$S_2^* = [S_2/(B,60AT/(A,T))]+1$$

于是，Ⅰ式的通解必为如下形式

$$N \equiv \frac{g(R_0,R_1,R_2)}{60(A,T)(B,60AT/(A,T)}(mod\ \frac{60AB}{(A,T)(B,60AT/(A,T))}$$

其中$C=60AB/(A,T)(B,60AT/(A,T))$，即上一节所说之元法；$g(R_0,R_1,R_2)$为$R_0,R_1,R_2$的整系数多项式。

依平均而论，Ⅰ式有解的个数应为

$$N_0 = S_1 \cdot S_2/(A,T)(B,60AT/(A,T))$$

我们将$R_1$与$R_2$的取值范围控制在正负一刻，即1/50日以内，并且对积年数$N_0$限定在一亿年以内为合用解，于是问题化为：

当$S_1=S_2=A/50$，$N_0<100,000,000$，Ⅰ式解集合中之元素的上限是多少？

由于依平均而论分布在$[0,C-1]$的N个解中，只有使$N_0<10^8$者方为合用，于是满足$S_1=S_2=A/50$，$N_0<10^8$的Ⅰ式之解按概率计算应为：

$$\frac{10^8N}{C} = \frac{10^8(A/50)(A/50)}{60\times60\times A\times B} = \frac{10^8}{9\times10^6\times B/A} = \frac{3}{8}$$

就是说，对于Ⅰ式，在$S_1=S_2=A/50$及$N_0<10^8$之条件下，可能取得解的概率仅为3/8。

实际上，Ⅰ式解的数目之具体范围是：

$$(S_1^*-1)(S_2^*-1) \leqslant N \leqslant S_1^*S_2^*$$

如果我们假定这些解在[0,C-1]区间内均匀分布,则Ⅰ式满足$S_1=S_2=A/50,N_0<10^8$的解的个数最多不超过

$$10^8S_1'S_2'/C=10[1+(A/50)/60(A,T)][1+A/50)/(B,60AT/(A,T))]/C$$

按这个估计式,对《麟德历》以后的32部历法的情况逐一进行演算,结果表明,其中21部历法的Ⅰ式最多只有一个合解,亦即他们的上元被Ⅰ式唯一确定,占总数的2/3。

其中使Ⅰ式最多有2个合用解者5部,不超过4解者4部,《明天历》与《占天历》各最多可有15个可用解。

至此我们可以说,对大部分历法来讲,仅以日名、岁名、回归年与朔望月四项基本先决条件,即将上元唯一确定,从而表明在这些历法中与上元有关的其他历法项目〔注:"其他历法项目"特指"五星会合周期,交点月(交点年,交食周期),近点月",下文不再声明〕,已不具备参与推算上元的必要条件。

因而,调整自己以附会上元,成为其他历法事项与上元协调的必由之路,别无选择。

## 四

从理论上推断,其他历法项目多不具备先决条件之资格,积年之法因而存在严重的附会现象,杜预称之"为合以验天",此乃上元积年的弊端所在,李谦评论"盖天道自然,岂人为附会所能苟合哉"。

积年之法,滥觞于刘歆《三统历》,后世更历者,皆以正元为治历首要。所谓"治历之本,必推上元,日月如合璧,五星如连珠,夜半甲子朔旦冬至"[15]。

上元积年虽如此重要,积年之法却不曾见诸史志,现今人们唯一能据为凭证的史料,是宋代秦九韶的《数书九章》,从中多少可以窥探一些唐宋历史家推演上元的历史原貌。

在前两节的讨论中,我们按照秦九韶演纪术所规定的四个先决条件,以历史上各种类型的演算方法进行分析,结论是单凭这几个条件,即将多数历法的上元积年完全确定,从而迫使我们选择其他历法项目附会既定上元的出路,对此,历史文献上有何记录呢?

杨伟《景初历》(237)之前,各历所有历法项目皆起于上元,杨伟破天荒给交食周期与月行迟疾设置交会差率与迟疾差率,使之游离于景初上元之外,从而大幅度地提高了近点月的精度。

何承天《元嘉历》(443),更将五星会合周期各立"后元",使元嘉上元的内函简约到最低限度,同时将东汉以来数百年间徘徊乃至倒退的五星会合周期之精度大大提高。

对此,祖冲之评论道:"算自近始,众法可同,但景初之二差,承天之后元,实以奇偶不协,故数无尽同,为遗前设后,以从省易。"[11]明确指出杨伟、何承天之举系出于无奈,何承天对此似不以为然,他说:"…虞书著钦若之典,周易明治历之训,言当顺天以求合,非为合以验天地,汉代杂候清台,以昏明中星,课日所在,虽不可见,月盈则蚀,必当其冲,以月推日,则躔次可知焉,舍易而不为,役心于难事,此臣所不解也"[11]

"顺天以示合",系指采用实际精测的历法数据,不经篡改修正,直接用以推算;"为合以验天",意即以实测数据为参照调整选择与之相近的历法数据,来配合既定上元,由于日月食的推算要起于上元,故需要"为合以验天";如果立交会差率,以"昏明中星,课日所在",直

接入算，则不仅精确而且省易，何承天对上元积年计算中那种“舍易而不为，役心於难事”的旧习，表示遗憾。

实际上“为合以验天”一语，出自更早的杜预之口：“当阳侯杜预著春秋长历，说云：‘…书谓钦若昊天，历象日有星辰，易所谓治历明时，言当顺天以求合，非为合以验天者也’。”[10]

李谦在《授时历议》中写道：“晋杜预云：治历者，当顺天以求合，非为合以验天。前代演积之法，不过为合验天耳…”[21]，明确指出推演上元的方法存在“为合验天”现象。

何承天至李谦之间800余年中，鲜有偿言指责这种现象者，其原因在于各治历家无不潜心构算，努力使七曜并发上元，自然不便对自己的追求进行非议。

在关于积年之法的论述中，《元史历志》称：“汉刘歆作《三统历》，始立积年日法，以为推步之准，后世因之，历唐而宋，其更元改法者，凡数十家；岂故相为乖异哉？盖天有不齐之运，而历为一定之法，所以既久而不能不差，既差则不可不改也…二十年，诏太子谕德李谦为历议，发明新历顺天求合之微，考证前代人为附会之失，诚可以贻之永久，自古及今，其推验之精，盖未有出于此者。”

新历，系郭守敬之《授时历》，李谦应召作《授时历议》，一者验明《授时历》废除积年日法之后“顺天求合”的进步所在，同时“考证前代人为附会之失”，如此率直文字，绝无仅有。

另外，上述文字将导致历史上频繁更历的原因，归咎于一成不变的积年之法之常规手段。

李谦在《授时历议》中写道：“昔人立法，必推求往古生数之始，谓之演纪上元，当斯之际，日月五星同度，如合璧连珠然。惟其世代绵远，驯积其数至逾亿万。后人厌其布算繁多，互相推考，断截其数而增损日法，以为得改宪之术，此历代积年日法所以不能相同者也，然行之未远，浸复差失，盖天道自然，岂人为附会所能苟合哉。”[21]

李谦再次强调了前代历法“行之未远，浸复差失”的原因，是出自上元推算中的人为附会现象，同时，对历代积年日法之所以各不相同，提出了精辟的见解。

在前一节演纪积年解集合的讨论中我们看到，每给定一个日法，I式可以取得小于1亿年的解的概率不足3/8，所以I式之解“至逾亿万”并不少见，由于治历者对大于亿年的积年数在布算或附会的过程中皆感到不便，因此要求I式解集合中凡大于一亿者为不合用，于是不得不多次调整日法，反复推考，“断截其数”，以保证I式取得合用解，调日法因而不废。

遍览史志，有关具体记述其他历法项目调整附会的文字尚不多见。

据《宋书·律历志》记载：“然而洪之迟疾，不可以检春秋，伟之五星，大乖于后代。斯则洪用心尚疏，伟拘于同出上元壬辰故也。”[11]

如果说这段话对刘洪《乾象历》之近点月的附会的现象尚有些隐讳其辞，那么对杨伟《景初历》五星会合周期的人为痕迹，则予以无情揭露。

一行在《大衍历议》中写道：“何承天反覆相求，使气朔之母合简易之率，而星数不得同元矣。李业兴、宋景业、甄鸾、张宾欲使六甲之首众术同元，而气朔余分其细甚矣。”[15]

何承天《元嘉历》设数极简，按理应利于积年演算。但欲使元嘉五星俱起上元，则其精度将与其积年数的大小相关，同时五星会合周期的数据选择亦直接依赖于积年数的大小，于是欲使五星配合上元，则无法使精度与历法数据简约两全，故而其“星数不得同元矣”。

李业兴《兴和历》，宋景业《天保历》，甄鸾《天和历》，张宾《开皇历》，所取纪法 b 与日法 A 皆相当庞大，即"气朔余分其细甚矣，"这是由于他们的近点月 G/A，半交点年 J'/A（《开皇历》取交食周期）与五星会合周期 M/b 分别以 A 或 b 为其法度，其各项数据之精度皆不理想，近点月半交点年尤其粗劣；如果这些项目参与各自上元的推算，决无扩充其法度的道理，李业兴等人这样做唯一合理的解释，便是在附会上元调整数据的过程中，由于法度 A 或 b 的庞大，尽量使误差减少。

凡此种种，无不说明上元推算中其他历法项目经过调整以附会既定上元之现象的普遍实在性。

*本文是我的硕士学位论文主干内容，选题及写作过程均在导师李继闵教授的帮助和指导下完成，在此表示衷心的感谢。*

## 主要参考文献

〔1〕《历代天文律历等志汇编》，中华书局，1976（文献〔2〕—〔21〕皆见载于〔1〕）。
〔2〕《汉书天文志》。
〔3〕《续汉书天文志》。
〔4〕《晋书天文志》。
〔5〕《魏书天文志》。
〔6〕《宋书天文志》。
〔7〕《史记历书》。
〔8〕《汉书律历志》。
〔9〕《续汉书律历志》。
〔10〕《晋书律历志》。
〔11〕《宋书律历志》。
〔12〕《魏书律历志》。
〔13〕《隋书律历志》。
〔14〕《旧唐书律历志》。
〔15〕《新唐书律历志》。
〔16〕《旧五代史历志》。
〔17〕《新五代史司天考》。
〔18〕《宋史律历志》。
〔19〕《辽史律历志》。
〔20〕《金史历志》。
〔21〕《元史历志》。
〔22〕瞿坛悉达：（唐）《开元占经》（729）。
〔23〕朱文鑫：《历法通志》，商务印书馆（1934）。
〔24〕朱文鑫：《历代日食考》，商务印书馆（1934）。
〔25〕新城新藏：《东洋天文学史》，东京（1929）。

〔26〕陈遵妫：《中国天文学史》，上海人民出版社（1982）。
〔27〕李约瑟：《中国科学技术史》，Vol. 3，Vol. 4。
〔28〕中国天文学史整理小组：《中国天文学史》，科学出版社（1981）。
〔29〕秦九韶：《数书九章》，（1247）
〔30〕张敦仁：《求一算术》，岱南阁从书（1801）
〔31〕李　锐：《李氏算学遗书》，（1823）
〔32〕陈　澧：《三统术详说》。
〔33〕钱宝琮：《中国数学史》，科学出版社（1964）。
〔34〕李　迪：《中国数学史简编》，辽宁人民出版社（1984）。
〔35〕吕子方：《吕子方科学史论文集》，四川人民出版社。
〔36〕吴文俊主编：《秦九韶与〈数书九章〉》，北京师范大学出版社。
〔37〕华罗庚：《数论导引》，科学出版社。
〔38〕唐汉良等：《日月食计算》，江苏科技出版社。
〔39〕胡继勤：《日食和月食》。
〔40〕薄树人："试探三统历和太初历的不同"，《自然科学史研究》1983第二期。
〔41〕李继闵："秦九韶关于上元积年推算的论述"，1987北京师范大学秦九韶国际会议。
〔42〕李继闵："调日法的数学原理"、《西北大学学报》1985年第二期。
〔43〕李继闵："从演纪之法与大衍总数术看秦九韶在算法上的成就"，见文献〔36〕。
〔44〕钱宝琮：(1)"秦九韶《数书九章》研究"；(2)"从春秋到明末的历法沿革"；《钱宝琮科学史论文选集》，科学出版社（1983）。
〔45〕李文林，袁向东："论汉历上元积年计算"《科学史文集》第二辑。
〔46〕李东生："论我国古代五星会合周期和恒星周期的测定"，《自然科学史研究》，Vol. 6第三期。
〔47〕陈美东："论我国古代年、月长度的测定"。
〔48〕陈美东："刘洪的生平、天文学成就和思想"，《自然科学史研究》1986第二期。
〔49〕李　迪："中国数学史中的未解决问题"，《中国数学史论文集》(三)，山东教育出版社。
〔50〕吕子方："三统历历意及其数源"，《自然辩证法学术研究》第四辑。

# 《九章算术》与刘徽的相似勾股形理论

冯立升

（内蒙古师范大学科学史研究所）

我国古代的几何学没有象古希腊几何学那样形成一般相似形的理论，但却建立了独特风格的相似勾股形理论。这一理论可以把一些几何问题转化为算术问题或代数问题，并与面积或体积理论结合起来，推导出一系列的公式和计算法则，用以解决各种实际问题，从而形成了我国古代几何学理论的一大特色。相似勾股形的概念很早就在古代的测量计算中被加以应用，它的产生可以追溯到周公与商高讨论"用矩之道"的时代。《九章算术》已把相似勾股形的概念和性质作为基本的概念、性质，并在《勾股章》中有系统的应用。刘徽在《九章算术注》中对勾股算法进一步从理论上作了说明，从而建立了具有中国传统特色的相似理论，

《九章算术》有许多地方记载了相似勾股形的性质，并用这些性质解决具体的问题。"勾股章"共有二十四个问题，其中十一个问题求解时要用到相似勾股形的性质。第17题到第24题，共八题都是测量问题，这些问题都要用相似勾股形相当边成比例的性质求解。刘徽在"勾股章"注文中对于《九章》原题的算法从原理上作了进一步论述，说明了原术的理论依据。

勾股章第17题为："今有邑方二百步，各中开门。出东门十五步有木。问出南门几何步而见木"。"术曰：出东门步数为法，半邑方自乘为实，实如法得一步"。此题已知半邑方 $b'=a=100$ 步，出东门步数 $a'=15$ 步（图1），按术文计算得出南门步数 $x$ $(b)$ 为

$$x=\frac{b'^2}{a'}=\frac{a^2}{a'}=666\frac{2}{3}\text{步}$$

刘徽在注文中对此算法进行了论证："以勾率为法也。此以出东门十五步为勾率，东门南至隅一百步为股率，南门东至隅一百步为见勾步。欲以见勾求股，以为出南门数，正合半邑方自乘者，股率当乘见勾，此二者数同也。"

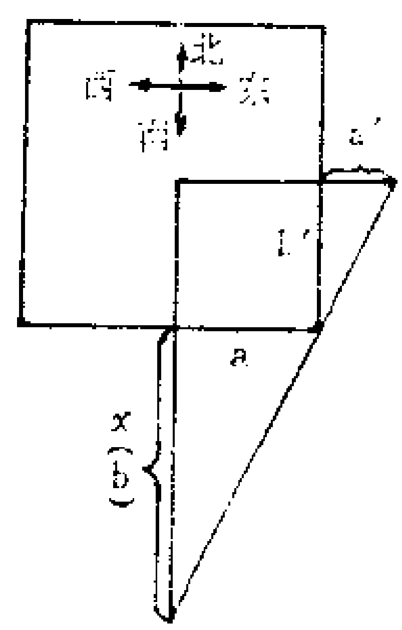



图 1

刘徽以 $a'$ 为"勾率"，$b'$ 为"股率"；$a$ 为勾，$b$ 为股，由相似勾股形的性质有：

$$\text{勾：股}=\text{勾率：股率}$$

上式与其它一些相似勾股比率关系，被刘徽称为"其相与之势不失本率"，这是刘徽用"率"的概念对相似勾股形质作出的一般性概括。"率"是传统数学中的一个重要概念，它在刘徽的整个数学理论中起着基础性的纲纪作用。刘徽在《九章》"方田章"的注中给出过率的定义："凡数相与者谓之率。率者，自相与通。有分则可散，分重叠则约也。"他还对率的性质有过论述："凡所谓率者，细

则俱细、粗则俱粗，两数相推而已。"由此可知，一组可以成比例变化的相关量，都可以称为"率"。相似勾股形的勾、股、弦也可视为一组成比例变化的相关量，其中每一个勾股形的勾、股、弦三边都可看作是一组率值，因此采用率的概念可以对相似勾股形进行理论概括。根据率的概念可知，刘徽的"不失本率"原理应包含两方面的内容。其一是，如果把一勾股形的勾、股、弦三边同时扩大或缩小同数倍，那么由此得到的一个新的勾股形与原勾股形为相似形。其二是，如果两个勾股形相似，那么不论其相互位置关系如何，两勾股形对应勾、股、弦三边之比率必相同。刘徽的"不失本率"原理不仅概括出了相似勾股形的性质，而且也明确了相似勾股的概念。刘徽就是运用这一原理对《九章》中的具体计算方法加以说明的。

在实际问题中，如果一勾股形的三边为已知，那么只要知道与此勾股形相似的另一勾股形的一边，便可计算出未知的另外两边。在通常情况下，刘徽把已知勾股形的勾、股、弦三边称为"勾率"、"勾率"、"弦率"，而需要计算边长的另一勾股形的三边则称为勾、股、弦。如果知道勾去求股或弦，此时又将勾称之为"见勾"，求得的股又可称为"见勾之股"，弦则又可称为"见勾之弦"。同样，如股为已知数求勾，则股为"见股"，求得的勾为"见股之勾"。上面所引的这一题是以见勾求见勾之股，按照《九章》的今有术，见勾即为所有数，勾率为所有率，股为所求率，则有

$$见勾之股=\frac{见勾\times股率}{勾率}$$

也即 $x=b=\frac{a\times b'}{a'}=\frac{a^2}{a'}=\frac{b'^2}{a'}$

勾股章第 18 题为："今有邑，东西七里，南北九里，各中开门。出东门十五里有木。问出南门几何步而见木"。"术曰：东门南至隅步数，以乘南门东至隅步数为实。以木去门步数为法。实如法而一。"此题已知东门南至隅步数 $a'=4\frac{1}{2}$ 里，南门东至隅步数 $b=3\frac{1}{2}$ 里，木去门步数 $b'=15$ 里（图 2）。术文给出的算法是：

$$a=\frac{b\times a'}{b'}$$

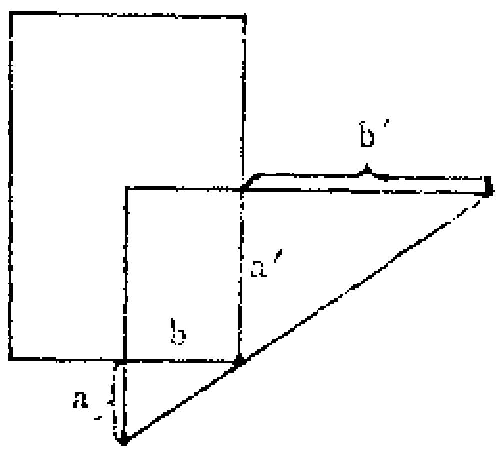


图 2

刘徽注云："此以东门南至隅四里半为勾率，出东门十五为股率，南门东至隅三里半为见股。所问出南门即见股之勾。为术之意与上同也。"刘徽这里是用相似勾股形的"不失本率"原理说明的。此题以见股求见股之勾，因而有

$$见股之勾=\frac{见股\times勾率}{股率} \quad 也即\ a=\frac{b\times a'}{b'}$$

勾股章第 22 题为："今有木去人不知远近。立四表，相去各一丈，令左两表所望参相直。从后右表望之，入前右表三寸。问木去人几何。""术曰：令一丈自乘为实，以三寸为法，实如法而一"，如图 3 所示，设 A，B，C，D 为四表，相距各一丈，即 AB=BC=CD=DA=a=100 寸，入前右表 $a'=ED=3$ 寸，术文给出的计算方法是：

$$b=\frac{a^2}{a'}=\frac{b'^2}{a'}$$

刘徽用"不失本率"原理论证："此以入前右表三寸为勾率，右两表相去一丈为股率，左右两表相去一丈为见勾，所问木去人者见勾之股。股率当乘见勾，此二率俱一丈，故自乘，以

三寸为法，实如法得一寸。”刘徽以 $a'$ 为“勾率”，$b'$ 为“股率”；$a$ 为“见勾”，$b$ 为“见勾之股”，用下面的公式计算。

$$见勾之股=\frac{见勾\times 股率}{勾率}$$

因此题中 $a=b'$，所以有

$$x=b=\frac{a\times b'}{a'}=\frac{a^2}{a'}=\frac{b'^2}{a^2}$$

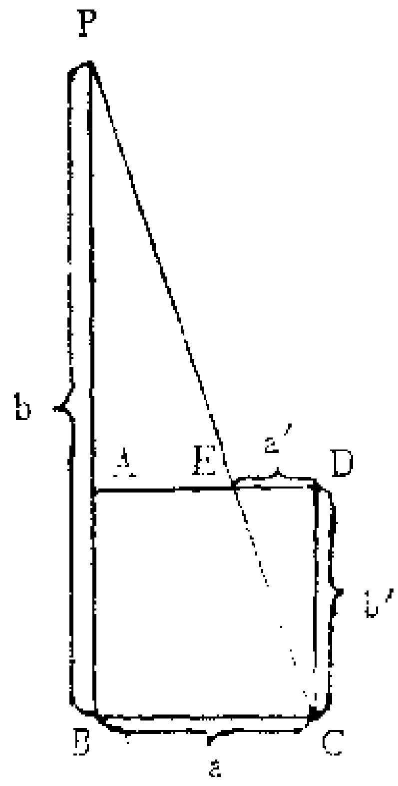


图 3

通过以上所举几个例题可以看到，《九章》的作者已经掌握了相似勾股形的各种性质，并能应用自如，但是《九章》没有从理论上提出有价值的论述。从刘徽的注释可知，他已从不同的问题中概括括出了关于相似勾股形的一般性原理，并用这一原理来说明、论证《九章》给出的计算方法。由于刘徽对相似勾股理论的论述是以《九章》注文的形式给出的，有关的说明分散于《勾股章》不同问题之下。要想了解刘徽相似勾股理论的全貌，需要借助更多一些的实例说明。

刘徽在对《勾股章》勾股容方与勾股容圆问题的注释中对相似勾股形的性质有较多的论述。特别应指出的是，他在勾股容方问题的注解中提出了“不失本率”的原理。勾股容方问题是已知一勾股形的勾、股，求勾股形内接正方形的边长，《勾股章》第 15 题给出了容方公式。如果设勾为 a，股为 b，所求方边之长为 x，则原题给出的容方公式可表示为：

$$x=\frac{ab}{a+b}$$

刘徽在注文中分别用图验法和勾股比例性质加以证明。现只介绍与相似勾股形有关的后一种方法，刘徽注文称：“幂图方在勾中，则方之两廉各自成小勾股，而其相与之势不失本率也。股面之小勾、股，并为股。令股为中方率，并勾股为率，据见勾五步而今有之，得中方也。复令勾为中方率，以并勾股为率，据股十二步而今有之，则中方又可知。此则虽不效，而法实有由生矣。下容圆术以今有衰分言之，可以见也。”刘徽在这里把相似勾股形对应边成比例的关系概括为“不失本率”原理，并用它来论证容方公式的正确性。

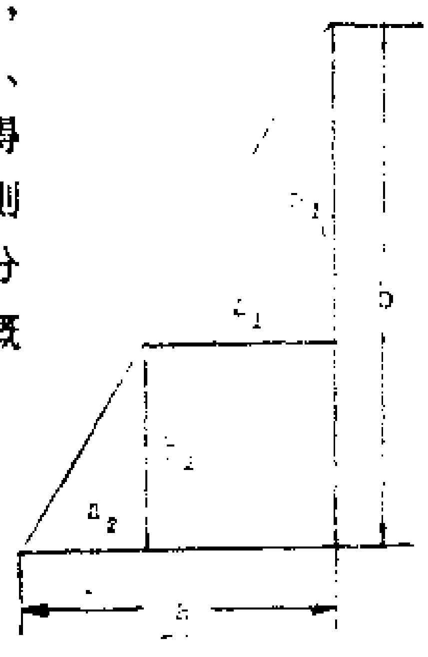


图 4

按照图 4，由“不失本率”原理有：

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}$$

由比例性质有

$$\frac{a_1}{a}=\frac{a_1+b_1}{a+b}$$

刘徽以 $a_1+b_1=b$ 为“中方率”，即为所求率，并勾股 $a+b$ 为“率”，即为所有率；见勾 a 是已知数，为所有数，由今有术得：

$$x=a_1=\frac{a\ (a_1+b_1)}{a+b}=\frac{ab}{a+b}$$

刘徽又以 $a_2+b_2=a$ 为“中方率”，$a+b$ 为“率”以见股 b 为所有数求得中方。

由“不失本率”原理知：

$$\frac{b_2}{b}=\frac{a_2}{a}=\frac{a_2+b_2}{a+b}$$

由此可得：

$$x=b_2=\frac{b\ (a_2+b_1)}{a+b}=\frac{ab}{a+b}$$

勾股容圆问题是已知勾股形的三边（或两边）求其内切圆直径的问题。设勾股形的勾、股、弦分别为 a、b、c，容圆直径为 d，《勾股章》第 16 题所给的容圆公式可表示为

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}$$

刘徽对此公式也用不同的方法进行了论证。涉及到勾股比例关系的论述如下：

“又以图之大体言之，股中青必合立规于横广勾股又邪三径均，而复连规从横量度勾股，必合而成小方矣，又画中弦以观其会，则勾股之面中央各有小勾股弦。勾面之小股、股面之小勾皆小方之面，皆圆径之半。其数故可衰。以勾股弦为列衰，副并为法。以勾乘未并者各自为实，实如法而一，则勾面之小股可知也。以股乘列衰为实，则勾面之小勾可知。”

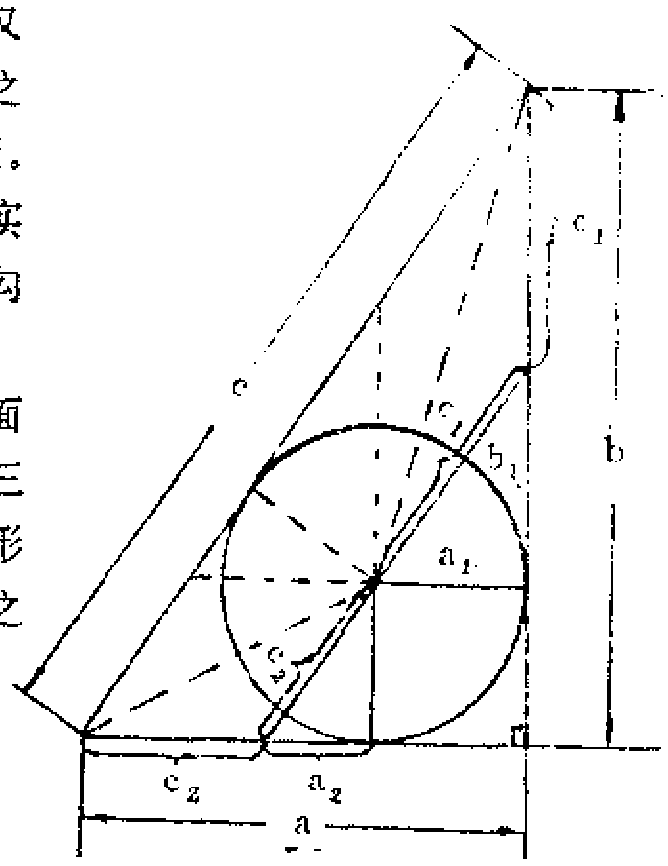



图 5

如图 5 所示，过圆心作平行于弦的“中弦”；则股面的小勾股形之勾、股、弦为 $a_1$、$b_1$、$c_1$，勾面小勾股形三边为 $a_2$、$b_2$、$c_2$，两小三角形均与原勾股形相似。由图形可知，股面小勾股弦之和 $a_1+b_1+c_1=b$，勾面小勾股弦之和 $a_2+b_2+c_2=a$，又 $a_1=b_2=\frac{d}{2}$。

由相似比例关系有

$$\frac{a_1}{a}=\frac{a_1+b_1+c_1}{a+b+c}=\frac{b}{a+b+c}$$

$$\frac{b_2}{b}=\frac{a_2+b_2+c_2}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}$$

由此可得

$$d=\frac{ab}{a+b+c}$$

以上讨论的例子所用到的相似勾股形性质，主要是对应勾股成比例的关系，只有勾股容圆问题涉及到了对应勾、股、弦成比例的问题。对于相似勾股形斜边（即弦）成比例的关系，刘徽是否也有过说明呢？

从《勾股章》第 14 题的刘徽注中，可以发现他对相似勾、股、弦的对应比例关系是有全面认识的。因此他的“不失本率”原理是一条一般性的原理。

勾股章第 14 题为：“今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙东行。甲南行十步而邪

东北与乙会。问甲乙行各几何。”“术曰：令七自乘，三亦自乘，并而半之，以为甲邪行率……以三乘七为乙东行率。置南行十步，以甲邪行率乘之，以乙东行率乘之，各自为实。实如南行率而一，各得行数”术文第一步是先求勾率（甲南行率）、股率（乙东行率）、弦率（甲邪行率）。设甲南行为a、乙东行为b、邪行为c，则有

$$a : b : c = \frac{7^2-3^2}{2} : 7\times 3 : \frac{7^2+3^2}{2} = 20 : 21 : 29$$

其中勾率为20，股率为21，弦率为29。已知a＝10步，然后由比例关系可求出b、c。

刘徽在注文中从一般意义上证明了勾股弦的公式，即，如已知（a+c）：b＝m：n则有：

$$a : b : c = \left[m^2-\frac{1}{2}(m^2+n^2)\right] : mn : \frac{1}{2}(m^2+n^2)$$

等式右边的三项刘徽称之为“勾率”、“股率”和“弦率”。将此题已给n＝7，m＝3代入便可求得：勾率＝20，股率＝21，弦率＝29。这就是南、东、邪行的比率。在解释《九章》原术求邪行和东行数算法时，刘徽指出：“南行十步者，所有见勾求弦、股，以弦、股率乘，如勾率而一。”很显然，刘徽认为由勾率、股率和弦率组成的一个勾股形（图7）与由南行数、东行数和邪行数构成的勾股形（图6）相似。注文中给出的比例关系为：

勾：股：弦＝

勾率：股率：弦率

在本题中，见勾为已知，因此可按今有术计算：

$$股=\frac{见勾\times 股率}{勾率},$$

$$弦=\frac{见勾\times 弦率}{勾率}$$

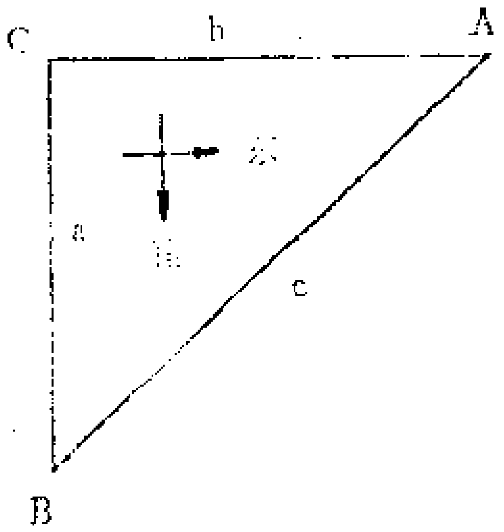



图6

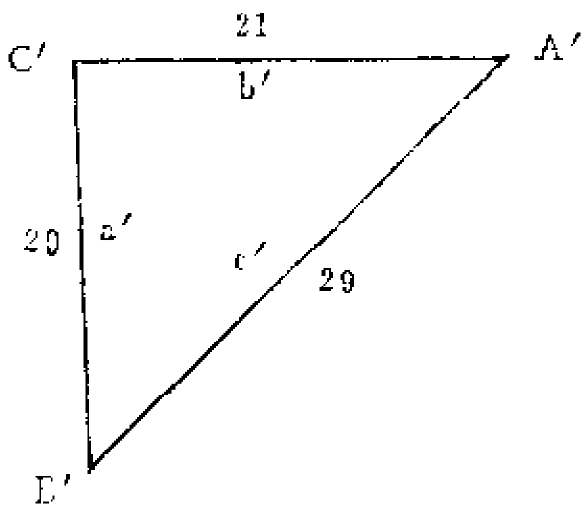



图7

由以上所述可知，刘徽已经概括出了相似勾股形的各种比率性质，并用统一的原理来处理具体的问题。通过刘徽的注文还不难发现，他已十分了解勾股形相似的条件。从前面所举的各种实例分析看，刘徽无疑已有了判定勾股形相似的方法。他实际应用了这样一条结论：如果勾股形的任意两边被与第三边平行的直线所截，那么新截得的勾股形与原勾股形相似。在图8、图9和图10中，分别给出了几种不同的情形。

对于不同的情形，按照“不失本率”原理可以统一处理。如果以a′、b′、c′分别为勾率、股率、弦率，a、b、c为勾、股、弦，则有

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

或 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

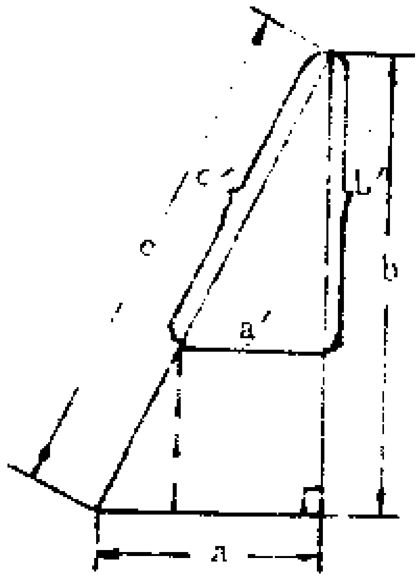



图 8

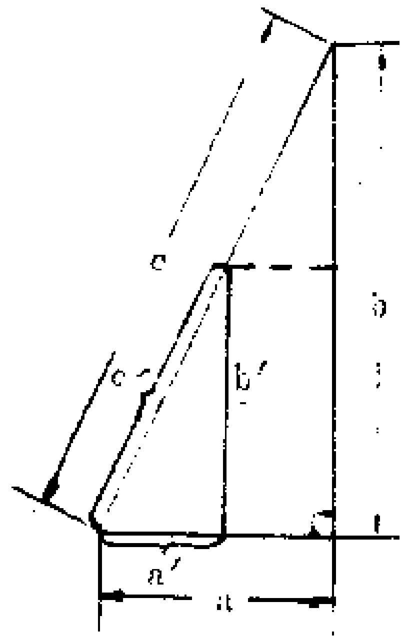



图 9

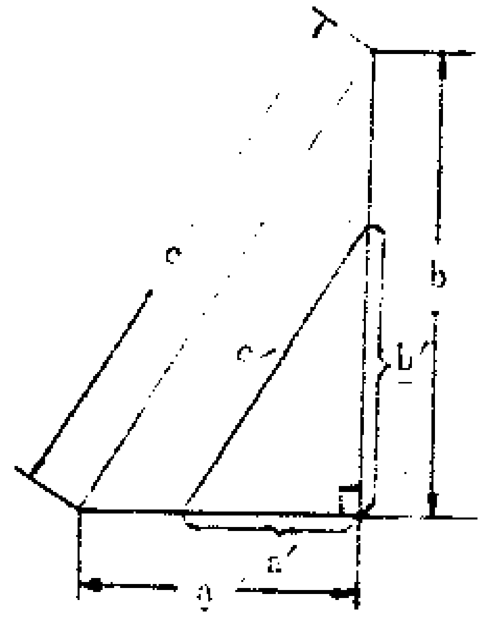



图 10

刘徽还把勾股不失本率原理和比例算法结合起来论证相似勾股形的其它一些比率性质。例如，他给出过下面一些比率关系：

$$\frac{a'}{a}=\frac{a'+b'}{a+b},\quad \frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$$

$$\frac{a'}{a}=\frac{a'+b'+c'}{a+b+c}\quad \frac{b'}{b}=\frac{a'+b'+c'}{a+b+c}$$

刘徽认为《九章》中的“今有”、“衰分”之术是处理比例问题的普遍方法，因而可以广泛应用。他把今有术、衰分术与不失本率原理结合起来处理各种各样的相似勾股形问题，从而建立起了内容丰富的相似勾股形理论。《九章》“今有术”的一般公式为

$$\text{所求数}=\frac{\text{所有数}\times\text{所求率}}{\text{所有率}}$$

应用今有术的要旨是，首先根据勾股不失本率原理确定具体问题中的比率关系，按已知条件确定出所有率、所求率和所有数，然后再按固定的今有术公式来计算所求之数。相似勾股形的比例关系为：勾：股：弦＝勾率：股率：弦率。通常情况下，勾率、股率以及弦率为已知数；如果在已知勾的情况下求股，则勾率为所有率，股率为所求率；勾为所有数，此时刘徽称其为见勾，股为所求数，被称为见勾之股，套用今有术公式即得

$$\text{见勾之股}=\frac{\text{见勾}\times\text{股率}}{\text{勾率}}$$

按照同样的道理，刘徽还给出了下面一些公式：

$$\text{见股之勾}=\frac{\text{见股}\times\text{勾率}}{\text{股率}}$$

$$\text{见勾之弦}=\frac{\text{见勾}\times\text{弦率}}{\text{勾率}}$$

刘徽还把衰分术与今有术结合起来加以应用，从而得出了一些用以解决更为复杂的问题的计算法则。

考察刘徽对《勾股章》的各种问题的注释可以发现，他对勾股问题进行证明的出发点是

出入相补原理。吴文俊先生曾对出入相补原理有过专门研究，他认为这一原理是中国古代几何学中最基本的原理。[1]对于相似勾股形理论与出入相补原理的关系，吴先生曾指出：在特定的条件下“出入相补原理与相似勾股形命题自然是等价的。”[2]作为一个简单实例，可以观察图11，由此图可以看出：

$\Delta ABC \cong \Delta ABC'$

$\Delta AB_1C_1 \cong \Delta AB_1C'_1$

$\Delta B_1BC_2 \cong \Delta B_1BC'_2$

如果把 $\Delta ABC'$ 移置 $\Delta ABC$ 处，$\Delta AB_1C'_1$ 移置 $\Delta AB_1C_1$ 处，$\Delta B_1BC'_2$ 移置 $\Delta B_1BC_2$ 处，那么依出入相补原理有：

$\square C_1C_2 = \square C'_1C'_2$（指面积相等）

$\square AC_2 = \square AC'_2$（指面积相等）

上面推出的结论在刘徽时代已被数学家当作重要的几何定理加以使用，与刘徽同时代（或稍早一些）的数学家赵爽就是以此结论为依据对古代的重差术作出证明的，[3]刘徽在《九章》的注文中也提到此定理并加以运用。这个由出入相补原理得出的推论，后来被宋代数学家杨辉称之为勾股测量术的“源”。他把这一推论进一步概括为：“其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同。”[4]按此定理可得

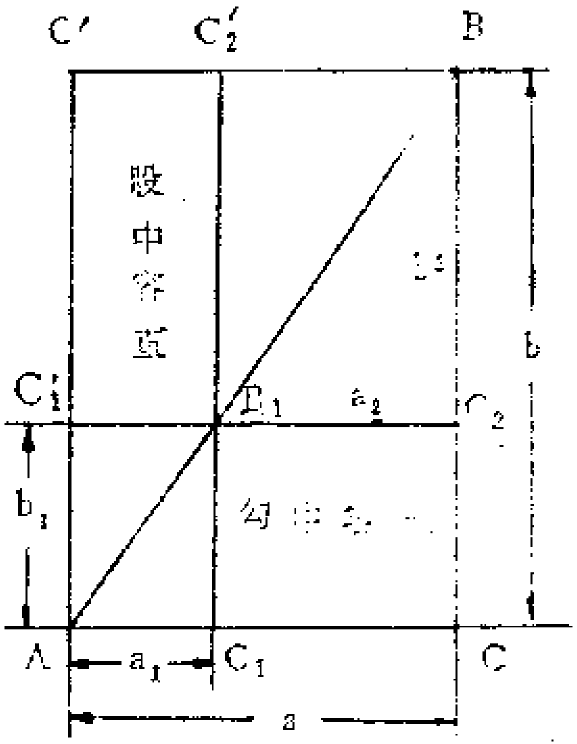



图 11

$a_2 \times b_1 = a_1 \times b_2$，$a \times b_1 = a_1 \times b$

因此有

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

或 $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a : b$

这就是相似勾股形对应勾、股成比例的关系。

刘徽在《勾股章》第20题的注文中明确应用过“勾中容横之积等于股中容直之积”的定理。他在注文中称：“所以折而西行为股，……故以出北门勾率乘西行股，得半广股率乘勾之幂。”按照刘徽的提法，此定理可表述为：勾率乘股之幂等于股率乘勾之幂。在图11中，如果以 $a_1$、$b_1$ 为勾率和股率，而以 a、b 为勾、股，那么矩形 $AC'C'_2C_1$ 的面积就是勾率乘股之幂，矩形 $CC_2C'_1A$ 的面积就是股率乘勾之幂。从刘徽的注文看，他显然认为“勾中容横等于股中容直之积”的命题与不失本率原理得到的命题是相通的。

实际上，如果把“勾中容横之积等于股中容直之积”的命题与勾股定理结合起来，再应用简单的比例性质便可推出不失本率原理的一般性结论。由关系式 $\square C_1C_2 = \square C'_1C'_2$ 可得 $a_2 \times b_1 = a_1 \times b_2$，因而有

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{b_1^2}{b_2^2}$$

又因 $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$，$a_2^2 + b_2^2 = c_2^2$，所以有

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}$$

由此得

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

同理，由关系式$\square AC_2=\square AC'_2$和勾股定理也可以推得

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$$

由此二式可得相似勾股形$AB_1C_1$、$BBC_2$和ABC之对应边的比例关系

$$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2=a:b:c$$

《勾股章》开首第一术是勾股定理。刘徽对此术作注时称："短面曰勾，长面曰股，相与结角曰弦。勾短其股，股短其弦。将以施于诸率，故先具此术以见其源，勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂。"由此注可知，刘徽认为勾股定理是一种可以"施于诸率"的一般性结论，它被视为其他勾股问题算法的"源"。这正好也说明相似勾股形理论的建立也要用到勾股定理。勾股定理和勾中容横等于股中容直定理的证明都依据的是"出入相补，各从其类"这一原理，而出入相补原理是刘徽作出的一个更高更普遍的概括。因此可以说，相似勾股形理论也是以这一基本原理为基础的。

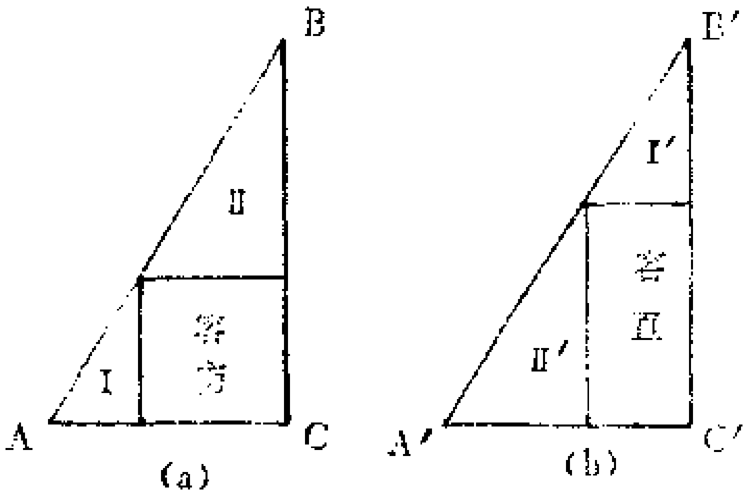



图 12

出入相补原理本身包涵着两个几何学的公理：1. 任何图形可以在空间移动，而形状大小不变。2. 叠置起来能重合的图形为全等的图形。按照这一原理，勾股形的"容方"、"容横"、"容直"问题可以相互转化。例如在图 12 中，勾股形 ABC 与 A′B′C′ 全等，如果将 I 移置 I′ 处，将 II 移置到 II′，则"容方"问题就被转化为"容直"问题。

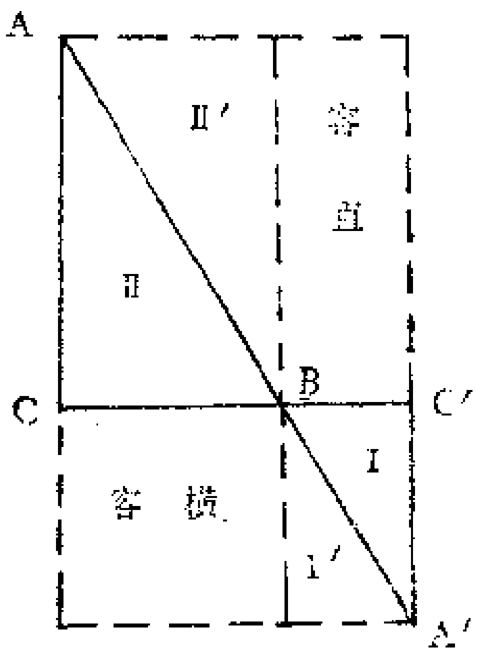



图 13

不失本率原理是在讨论"勾股容方"之类的问题时提出来的，"容方"、"容横"之类的构图在相似勾股形的判定方面有着特殊的作用，一般来说，如果两个勾股形相似，那么经过图形的移动，总可以将它们合成在一个容直或容横的构图中。因此，能否转换成"容横"、"容方"的构图，可作为相似勾股形的判定条件。对于图 13 中的勾股形 ABC 和勾股形 A′BC′，因既可以将它们合成"容横"的构图之中，也可以合成于"容直"的构图之中，很容易便可判断出二者为相似形。我们在前面已经通过实例分析讨论过刘徽判定勾股形相似的方法。图 8、图 9 本身实际上已给出了"容横"、"容直"的构图，而构图 10 所示情形也可以通过图形的平移转化为图 8 或图 9 给出的情形。刘徽的不失本率原理是从"容方"、"容横"等典型图形中概括出来的，这一原理本身已隐含了相似勾股形的判别条件。

综上所述，《九章》与刘徽的相似勾股形理论是建立在出入相补原理和比例算法基础上的，

刘徽把出入相补原理与《九章》的比率算法结合起来对《勾股章》测量问题的算法作了理论上的论证，从中概括出了关于相似勾股形的一般原理和方法，构成了我国古代独特的相似勾股形理论，刘徽还把相似勾股形理论用以解决各种各样的测量问题，建立起了丰富多彩的勾股测量理论与方法，使得我国古代几何学内容十分丰富，表现出西方几何学迥然不同的风格。

## 参考文献


〔1〕吴文俊："出入相补原理"，载《中国古代科技成就》，1978，中国青年出版社，第80页—100页。

〔2〕吴文俊："我国古代测望之学重差理论评介，兼评数学史研究中的某些方法问题"，《科技史文集》第8辑，数学史专辑，1982，上海科技出版社，第10—30页。

〔3〕赵爽：《周髀算经注》"日高图说"。

〔4〕杨辉：《续古摘奇算法》卷下。


## 出版信息

△ **李继闵著《东方数学典籍〈九章算术〉及其刘徽注研究》出版。**

《九章算术》(简称《九章》)是中国古代流传下来最早的一部数学巨著，它大约成书于秦汉时期，三国时代伟大的数学刘徽于公元263年写成的不朽之作——《九章注》，进一步奠定了中国古代传统数学的理论基础。

《九章》与刘徽注堪称古代东方数学的代表作。它足以和古希腊欧几里得《几何原本》相媲美，却又表现出与西方数学迥然不同的理论体系和风格，对于古代中国以至世界数学的发展产生了极其深远的影响。

本书是关于《九章》的系统研究专著，内容涉及中国古代数学的思想，方法和理论等，全面反映秦汉数学的成就与特色。它将引起重新评价中国古代数学在世界数学史上的地位。本书熔文字校勘、考证诠释、诘难辩证、古证复原、算理分析、体系清理、溯源探索、中外比较于一炉，从多角度与各个方面对《九章算术》及《九章注》进行探讨。经著名数学家兼数学史家吴文俊教授审阅、推荐并为本书撰写序言。全书35万字，前有大量精美图版插页。

本书为陕西人民教育出版社与台湾九章出版社合作出版的重点图书之一。(迪)

# 《张邱建算经》的成书年代问题

冯立升
（内蒙古师范大学科学史研究所）

《张邱建算经》是中国传统数学的一部典籍，在中国数学史上占有重要地位。可是，关于这部著作的编写年代及作者的生活时代，说法却不一致。《宋史·礼志》算学祀典云："封……魏刘徽淄川男、晋姜岌成纪男、张邱建信成男，夏侯阳平陆男，后周甄鸾无极男。"清代阮元的《畴人传》与宋算学祀典一样，也列张邱建于晋代。李约瑟认为"书中的内在证据表明，《张邱建算经》写于468年到486年之间"。[1]钱宝琮经过考证，断定该书编写年代"是在四六六年到四八五年之间。"[2][3]伊东俊太郎等所编《简明世界科学技术史年表》将《张邱建算经》定为公元470年左右的作品。[4]近年来出版的各种数学史著作均采用钱宝琮的观点，钱先生的说法似已成为定论。笔者认为，过去对于该书编写年代所作的考证不够细致，上述说法缺乏充分根据。鉴于这样的想法，笔者不揣浅陋，提出一些不同的看法，以就教于识者。

将《张邱建算经》的编写年代定为公元466至485年之间的根据是：①《算经》卷中第十三题为："今有率户出绢三匹，依贫富欲以九等出之，令户各差二丈。今有上上三十九户，上中二十四户，……下下一十三户。问九等户，各应出绢几何。"这与《魏书·食货志》记载显文帝即位（公元466年）"因民贫富为租输三等九品之制"相合。又《魏书·食货志》载："先是天下以九品混通，户调帛二匹，絮二斤，丝一斤，粟二十石。又入帛一匹二丈，委之州库以供调外之费。至是（太和八年）户增帛三匹，粟二石九斗以为官司之禄。"太和九年（公元485年）"下诏均给天下民田"。均田制颁行后，九品混通制的户调法就废弃不用。因此，钱宝琮先生得出结论："我们断定《张邱建算经》的编写年代是在公元四六六年到四八五年之间。阮元《畴人传》列张邱建于晋代是缺少事实根据的。"[5]钱先生又曾指出："上引的算术题能够适合公元466年到484年间元魏户调法中'九品混通'的要求。我们有理由断定《张邱建算经》的编写年代是在这十八年之内。"[6]

我们认为，仅仅依据上面的考证资料得出结论，恐怕未必妥当。许多史料表明，"九品混通"的户调制并非在公元466年在北魏开始实行，它是沿袭晋代"九品相通"之制而来的，在北魏初期就已实行。据《魏书》卷四上《世祖纪》上太延元年（公元435年）十二月诏："若有发调，县宰集乡邑三老计赀定课，裒多益寡、九品混通，不得从富督贫，避强侵弱。"又延和三年（公元434年）二月诏曰："其令州郡县隐括贫富，以为三级，其富者租赋如常，中者复二年，下穷者复三年。"这说明北魏初年不仅按赀发调之制沿续了下来，而且在内地州郡所施行的税目也循晋制。北魏在颁布均田令的第二年（太和十年），设立了三长制，并制定了新的户调制度。当时有人反对设立三长制和调整租调，其理由之一是："民俗既异，险易不同，

九品差调，为日已久，一旦改法，恐成扰乱。"[7]这说明在太和十年（公元486年）之前，北魏一直采用的是"九品混通"的户调制。由此可知，前面所引《算经》的九等户出绢一题只是表明该书撰成于公元486年以前，而不能说明该书编写于公元466年之后。实际上，从《张邱建算经》中一些具有时代特征的算题内容考证，它的编写年代还应在公元466年之前。

据《魏书》卷一一〇《食货志》载："显祖即位……至天安、皇兴中（公元466—470年），岁频大旱，绢匹千钱。"《算经》卷上27题："今有丝一斤八两……今有钱一千，问得绢几何？答曰：一匹二丈六尺六寸，太半寸。"由此推算可得，一匹绢为六百钱。又卷上28题得数为：匹绢值钱"七百五钱十七分钱之十五。"由此可知，《张邱建算经》大概不会写成于466年至470年之间。

此外，依《魏书·高祖纪》记载，从元宏即位到施行均田制的十五年（公元471—485年）中，有许多州镇连年发生水旱饥荒，以致许多老百姓卖儿鬻女，逃亡他乡。均田制是在当时亟须进一步发展农业，解决严重的饥荒，以稳定政权的要求下出现的。在均田制施行前的这些年里，由于饥荒不断发生，绢的价值无疑也是很高的，一匹绢所值估计要超过六、七百钱。

拓跋氏统治者开始进入中原后，曾设置山林川泽等狩猎禁地并广封良田，以为禁苑。如在天兴二年（公元399年）"二月丁亥朔，诸军同会，破高车杂种三十余部，……以所获高车众起鹿苑，南因台阴，北距长城，东包白登，属之西山，广；轮数十里。"[8]太武帝时"上谷（河北怀来县境）民上书，言苑囿过度，民无田业，乞减大半，以赐贫人。"[9]《张邱建算经》有一些题目似与上述记载有相合之处，现列举如下：

卷上第7题："今有官猎得鹿，赐围兵。……问围兵几何？答三万五千人。"

卷上第8题："今有猎围，周四百五十二里一百八十步，布围兵十步一人。今欲缩令通身得地四尺。问围内缩几何"

卷上第9题："今有围兵二万三千四百人以布围周，……问兵相去几何。"

卷上第10题："今有封山周栈三百二十五里，……问周行几何日会？"

北魏在统一北方后，社会秩序渐趋安定，农业生产也慢慢恢复，北魏王朝将早年在各地圈占苑囿猎场和封禁的山林川泽，先后弛禁，听民耕垦樵采，或即赐予贫民。《魏书》卷三十七《司马楚之传附子跃传》载："跃表罢河西苑封，与民垦殖。有司执奏：'此麋鹿所聚，太官取给，今若与民，至于奉献时禽，惧有所阙。'诏曰：'此地若任稼穑，虽有兽利，事须废封。若是山涧，虞禁何损？寻先朝置此，岂苟借斯禽，亮亦以俟军行薪之用。其更论之。'跃固请宜以与民，高祖从之。"又《魏书》卷六《显祖纪上》记载："（皇兴四年，公元470年）十有一月诏弛山泽之禁。"另外，在延兴三年（公元473年），诏："关外苑囿，听民樵采。"[10]这些史实说明，皇兴四年前后，北魏王朝已先后将早年圈占的苑囿猎地弛禁。《张邱建算经》的内容涉及到围猎封山之事较多，因而该书不会是写于公元470之后。

根据以上所述，《张邱建算经》编写年代应在魏显祖即位之前，即在公元465年之前。进一步考察这部书本身所包含的一些有时代特点的证据，我们可以重新定出该书成书年代的时间界限。从这部书的内容来看，它完全符合北魏初期的实际情况。除了前面我们已论述过的一些内容外，还有某些依据。

《算经》卷上第17题为"官出库金"分给王、公、侯、子、男五级爵位。查《魏书·官

氏志》载："天赐元年（公元404年）……九月，减五等之爵，始分为四，曰王、公、侯、子，除伯、男二号。"又据《魏书》卷七《高祖纪》载："（太和）十有六年（公元492年）春正月……诸远属非太祖子孙及异姓为王，皆降为公，公为侯，侯为伯，子、男仍旧，皆除将军之号。"由此可知，在公元492年之前，男这一级爵早已恢复。另外，"太和十九年（公元495年）诏曰：……原出朔土，旧为部落大人，而皇始（公元396—404年）以来，有三世官在给事已上及州刺史、镇大将及品登王公者，为姓。若非大人，而皇始已来，职官三世尚书已上，及品登王公中间不降官绪，亦为姓。诸部落大人之后，而皇始已来，官不及前列，而有三世为中散监已上，外为太守、子都，品登子、男者，为族。若本非大人，……品登侯已上者，亦为族。"[11]。这里记载的是当时定鲜卑贵族及汉人姓族等级的规定。其中提到王、公、侯、子、男五级爵位，而没有伯这一级。这表明王、公、侯、子、男五级是太和年间以前常设的爵位。《算经》卷上17题中，没有这一级，正与此相合。

据《魏书》卷四下《恭宗纪》记载，在恭宗拓跋晃（卒于公元451年）监国时，曾"又禁饮酒杂戏，弃本沽贩者。"此外，魏在高宗拓跋濬时也"设酒禁"，且规定酿、沽、饮者皆斩。《张邱建算经》卷中18题："今有清酒一斗，值粟十斗，醑酒一斗，值粟三斗。"《算经》的写作的年代似应在设立酒禁之前。

《张邱建算经》卷上16题为："今有甲日行疾于乙日行二十五里，而甲发洛阳七日至邺，乙发邺九日至洛阳。问邺、洛阳相去几何？"这说明写此书时洛阳与邺之间可以直接交通。《算经》还有一道"有人持钱至洛"经商的问题。据史书记载，北魏在神䴥三年（公元430年）十月攻占洛阳，因此可以断定《算经》的成书应在公元430年以后。

概括以上所述，我们可以得出结论，《张邱建算经》的成书年代是在公元431年至450年之间，而不是公元466至485年之间。这部著作的编写是在魏太武帝（即魏世祖）时代完成的。

对于上面的结论，还可以找到旁证。北魏初期，百官皆无俸禄，当时由官商利用官府的部分钱财，回易取利，以供政府机构和官吏所需。高祖元宏班给百官俸禄时，即诏令"始班俸禄，罢诸商人，以简民事。"[12]这样规定实际上是要取消官府与商人合伙经商。北魏初期，官吏经商相当普遍，就连太子拓跋晃也曾酤贩经商。[13]当时普通商业很不发达，但富商大贾却活动频繁。高宗拓跋濬和平二年（公元461）诏曰："刺史牧民，为万里之表，自顷每因发调，逼民假贷，大商富贾，要射时利，旬日之间，增赢十倍。上下相同，分以润屋。故编户之家，困以冻馁，豪富之门，日有兼积。为政之弊，莫过于此。其一切禁绝，犯者十匹以上者皆死。"[14]在《张邱建算经》中也有借贷方面的问题。卷上28题："今有甲贷乙绢三匹，约限至不还，匹日息三尺。"卷下第36题："今有人举取他绢，重作券，要过限一日息绢一尺，二日息二尺，如是息绢日多一尺，今过限一百日，问息几何？答曰：一百二十六匹一丈。"这两题讨论了高利贷的利率和计算方法，算题本身的内容正与史书所载北魏初富商大贾经营高利贷的史实相合，因而这也可看作是《张邱建算经》撰写于北魏太武帝时代的一个旁证。

《张邱建算经》在不定方程、等差级数和最小公倍数求法等方面有突出成就，其中有些成果属于首创。搞清楚这部书的编写年代，不但可以了解这些成果最早出现的年代，也有助于认识它的价值。考证《张邱建算经》的成书年代，还有助于解决另外两部古算典籍的编写年代问题。《张邱建算经》自序云："其《夏侯阳》之'方仓'，《孙子》之'荡杯'，此等之术，

皆未得其妙。故述新术。”据此可知《孙子算经》和《夏侯阳算经》均在张邱建之前。因张邱建的《算经》成书于北魏初，因此可以断定这两部书的编写年代要早于北魏时期，不属于南北朝时期成书的作品。这说明重新探讨《张邱建算经》的成书年代问题，仍有一定意义。

注：本文所引《张邱建算经》原文，均据钱宝琮校点《算经十书》本。

## 参考文献


〔1〕李约瑟：《中国科学技术史》（中译本），第三卷，1978，科学出版社，第71～72页。

〔2〕〔5〕钱宝琮校点：《算经十书·张邱建算经提要》，1963，中华书局，第325页。

〔3〕〔6〕钱宝琮主编：《中国数学史》，1964，科学出版社，第80页。

〔4〕伊东俊太郎编，姜振寰等译：《简明世界科学技术史年表》，1984年，哈尔滨工业大学出版社，第17页。

〔7〕《魏书》卷五十三《李冲传》。

〔8〕《魏书》卷二《太祖纪》。

〔9〕《魏书》卷二十八《古弼传》。

〔10〕〔12〕《魏书》卷七上《高祖纪上》。

〔11〕《魏书》卷一百一十三《官氏志》。

〔13〕韩国磐：《魏晋南北朝史纲》，1983，人民出版社，第465页。

〔14〕《魏书》卷五《高宗纪》。


## 出版信息

△ 罗见今著《科克曼女生问题》出版。本书是辽宁教育出版社“世界数学名题欣赏丛书”之一。1990年2月已出版。科克曼女生问题是1850年科克曼提出的，它的存在性成为组合数学区组设计的一大难题。女生问题与BIB、斯坦纳系、RBIB和科克曼系都有直接联系。罗见今副教授在本书中引用较多资料，系统介绍这方面研究的历史和现状，特别是首次引用著名组合数学家陆家羲在60年代初给出的科克曼女生问题的解，介绍了他的重大科研成果。本书从一个世界著名的数学游戏出发，阐述了区组设计的一些基本知识，把历史性、知识性和趣味性熔为一炉，可供大学生及广大数学爱好者阅读。（荣）

# 王孝通《缉古算经》自注佚文校补

王荣彬
（内蒙古师范大学科学史研究所）

王孝通《缉古算经》是现有传本的古算书中，继《九章算术》之后具有较高水平的最重要的算经之一。《缉古算经》原名《缉古算术》，唐初纳入国子监学馆明算科学习书目之后，改名《缉古算经》。

王孝通的生卒年代不详，生平事迹世人所知也不多。据《上缉古算术表》，作者自称当时他已是"迄将皓首"之人。王孝通上表的时间是在武德九年（公元 626 年）之后不久，[1]可推测他大约生于北周武帝年间（561－579）。王孝通在隋朝做过官，唐初奉敕校勘过傅仁均历。他是唐初的算历博士，官至通直郎太史丞。《缉古算术》的编撰年代也不详，应在武德九年之前。

《缉古算经》全书一卷，共二十题。第一题是求夜半时月所在赤道经度；第二至六题及第八题，是关于土木工程中的土方体积问题；第七题及第九题至十四题，是已知仓房和地窖等容量，返求各边尺寸，这些问题都归结出求解一个三次方程的正数解，第十五至二十题是勾股问题，前四题仍是求解三次方程，最后两题则涉及到所谓的"双二次方程"问题。其中用开带从立方解三次方程的方法，不仅是中国现存典籍的最早纪录，在世界数学史上也是这方面最古老的著作。

遗憾的是，现传本《缉古算经》最后六题有残缺，微波榭本已补足了第十五题术文及注文的十三字，第十七题术文及一部分注文十三字；第十七题术文及一部分注文十三字，张敦仁补足了后三题的题目、答案和术文部分。但十七和十九问中王孝通的注文仍然阙漏。李迪先生指出："现传本《缉古算经》从第 17 题到第 20 题有残缺，李俨在严敦杰的协助下进行佚文校补，根据张敦仁《缉古算经细草》校补佚文 215 字。钱宝琮则认为不好校补，在其校点的《缉古算经》中有 70 个字的空位，① 第 20 题王孝通自注中还有两段省略号，表明连佚文有多少字都不清楚，他在第 17 题的校勘记中说：'此术王孝通自注，自此以下缺字很多，颇难补足，只得阙疑'，这种残缺是什么时候造成的？怎么造成的？很少有人道及"。[2]对于这样一本重要的古算书，补足其佚文，使其完整无缺是件意义十分重大的工作，当然难度也很大。本文将在前人工作的基础上，对第十七和十九两问王氏自注的佚文进行校补，虽然这项工作还十分幼稚，但笔者还是愿意冒昧地拿出来，以就教于数学史界的先学们。至于李迪先生提出的造成这种残缺的时间与原因问题，只能指待他日了。

传本《缉古算经》现有四库全书本和孔继涵所刻的微波榭本，都是以毛扆收藏的一个影

① 应为 73 个空位，这下的"第 20 题"应为第 19 题。

宋抄本为底本，这个抄本现存故宫博物院，其它各版本都是以这两种版本为蓝本的。清中掀起了一股研究古算的浪潮，人们对《缉古算经》也进行了大量的研究。其中李潢著有《缉古算经考注》二卷，张敦仁有《缉古算经细草》一卷，陈杰先后撰有《缉古算经细草》一卷、《缉古算经图解》三卷、《缉古算经音义》一卷，并有经文一卷。其经文依微波榭本钞录，并在《音义》中注明了微波榭本与知不足斋本的不同之处，在经文中只用符号标明，而未作改动，以俟考证。揭廷锵著有《缉古算经考注图草》，该书是在李潢的《考注》基础上添加图及细草而成。李潢和揭廷锵的书因资料所限，笔者未见。1963年，中华书局出版了钱宝琮校点的《算经十书》（以下称钱校本），本文的校补即依钱校本[3]为蓝本，并参照了四库本[4]、陈杰的抄本[5]和张敦仁的《细草》本[6]。

钱校本依张敦仁和微波榭本的补文已补足了南宋本最后三页除十七、十九问注文以外其它所有的烂脱文字。李俨、严敦杰《缉古算术佚文校补》一文已把这两个注文全部补齐，但钱宝琮否定了他们的工作，认为"缺字很多，颇难补足"，因而钱校本的这两个注文处仍留有73个空格和两处省略号，钱氏的做法是很慎重的，为说明问题现将李俨和严敦杰所补的注文抄录如下，同时也便于和下面笔者的补文进行对照。其中带着重点的字为补文

第十七问注文："勾弦相乘幂自乘即勾幂乘弦幂之积故以倍股弦差而一得一股与半差再乘得弦幂为方今多再自乘半之为隅以减立幂得横虚二立廉为二多多自乘半之为横隅倍之为从隅故多自乘倍之为方法今半多为上廉即二多数与半多为廉法故五之二而一从开立方除之。"

第十九问注文："股弦相乘幂即为股幂弦幂相乘之数亦是股幂乘股幂加勾幂之数以股幂为长以股幂与勾幂相加为从开方除之得股幂又开方得股此分母常开尽"。[7]

笔者认为，上述两段中的补文有两个重要缺陷：一是未能按各版本所空的空位数目进行校补，一是补文与原术的意思不相合。第十九问的注文虽与该题术文意思相近，但所补的文字与尚存的文字衔接不连贯，使人费解，且与王孝通《缉古算经》的行文表叙方式不同，因此未能得到数学史界的公认。笔者认为，补足这两段注文必须注意以下三点，首先，必须按照各本尚能确定的缺字空位数进行校补；其次，必须和算经中的经文、术文原意相符；最后还要注意，所补的文字必须和王孝通的前后行文习惯一致。鉴于以上所提的原则，在对第十七问校补之前，首先让我们来看一下与它关系比较密切的第十五问。

题设已知勾股相乘幂 $ab$，勾弦差 $c-a$，求勾 $a$、股 $b$、及弦 $c$。术曰："幂自乘，倍多数而一. 为实。半多数为廉法，从开方除之，即勾……"[8]若用字母表示术文，相当于给出了方程：

$$x^3+\frac{c-a}{2}x^2=\frac{(ab)^2}{2(c-a)} \qquad (1)$$

《缉古算经》里共有28个这样的三次方程：

$$x^3+px^2+qx=r \quad (p>0, q\geqslant 0, r>0)$$

术文对其解法皆简述为：以 $r$ 为实，以 $q$ 为方法（若 $q=0$ 则无此句），以 $p$ 为廉法，从。开立方除之，即得 $x$。

王孝通自注说："勾股相乘幂自乘，即勾幂乘股幂之积。故以倍勾弦差而一，得一勾与半差相连，乘勾幂为方。故半差为廉法，从。开立方除之。"可见注文乃是对术文的解释。此段注有以下几层意义：

1. "勾股相乘幂自乘，即勾幂乘股幂之积"，即是说：

$$(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$$

2. 如图 1 易得：$b^2 = (c-a)^2 + 2a(c-a)$

从而
$$\frac{a^2b^2}{2(c-a)} = \frac{a^2[(c-a)^2 + 2a(c-a)]}{2(c-a)} = \left(\frac{c-a}{2} + a\right)a^2$$

即所谓："倍勾弦差而一，得一勾与半差相连，乘勾幂为方"。而所得的"方"即为图 2 所示的长方体。

3. 把图 2 的体积分成两个部分，即为方程(1)左边的两项，故方程 (1) 成立。王孝通在《缉古算经》中列三次方程都是通过体积相等关系而得，这题也是如此，下面的十七问也不应例外。

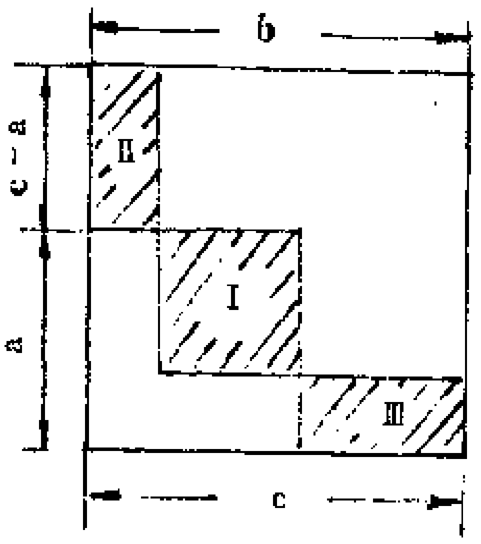


图 1

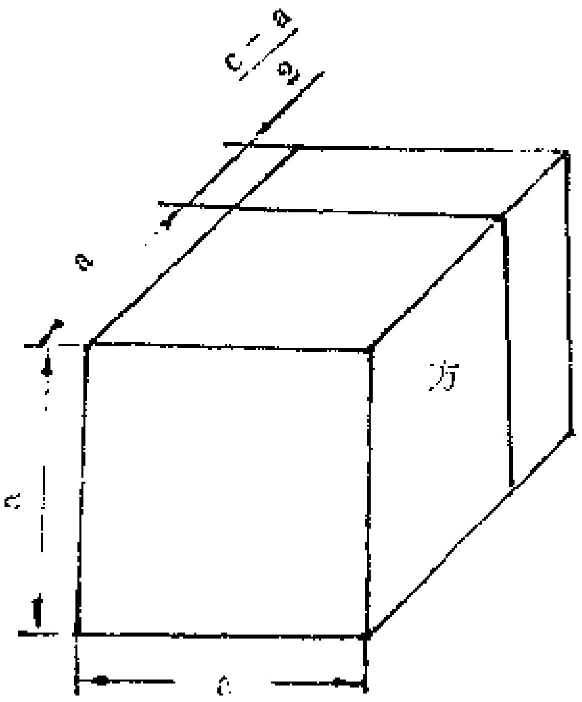


图 2

4. "开立方除之"，指解方程的过程。

根据以上分析，我们再来看第十七问。

题设已知勾弦相乘幂 $ac$，弦多于股 $c-b$，求股 $b$。

术曰："幂自乘，倍多而一，为立幂。又多再自乘，半之，减立幂，余为实。又多数自乘，倍之，为方法。又置多数，五之，二而一，为廉法，从。开立方除之，即股。"

术文相当于给出了三次方程

$$x^3 + \frac{5(c-b)}{2}x^2 + 2(c-b)^2x = \frac{(ca)^2}{2(c-b)} - \frac{(c-b)^3}{2} \qquad (2)$$

同样，该题的注文也应是对术文所列方程的解释。查勾股问题的六题，分为三个类型，十五、十六题相似，十七、十八题相似，十九、二十题相似。所以王氏分别在十五、十七、十九三题设注文，其目的是分别说明这三种类型的方程系数的求法。故我们只要搞清楚术文所给方程的来历，校补注文还是可能办到的。受十五问注文的启发，我们也从体积相等关系去寻找解决

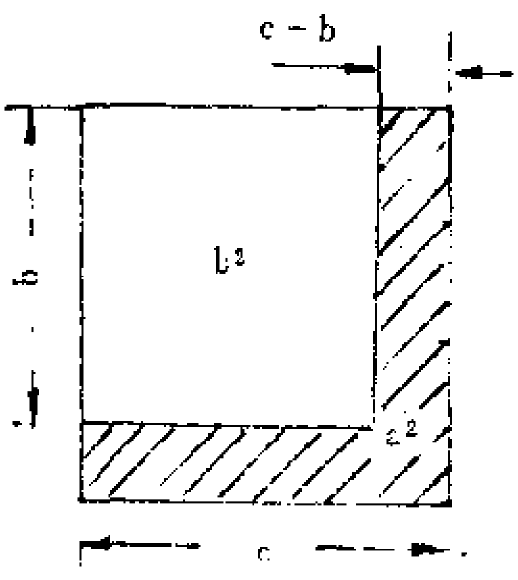


图 3

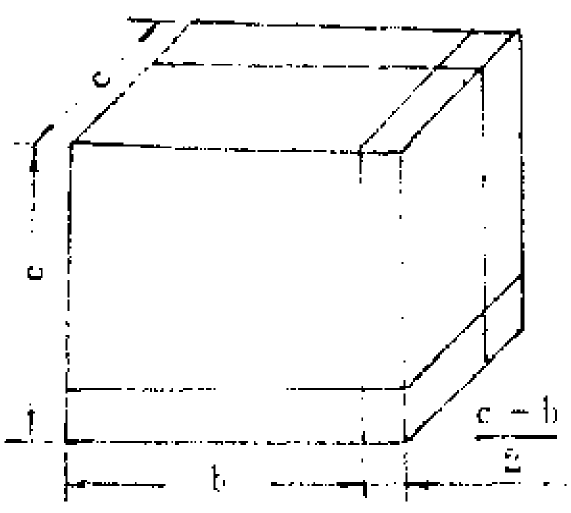


图 4

问题的方法。首先看"幂自乘，倍多而一，为立幂"为何指。如图 3 所示，$a^2$ 即图中阴影部分面积，从而有

$$a^2 = 2(c-b)\cdot c-(c-b)^2$$

故

$$\frac{c^2a^2}{2(c-b)}=\frac{c^2[2(c-b)c-(c-b)^2]}{2(c-b)}$$

$$=c^2(c-\frac{c-b}{2})$$

$$=c^2(b+\frac{c-b}{2})$$

可见$\frac{c^2a^2}{2(c-b)}$亦为一长方体，如图 4 所示。

现在我们须把图 4 适当分割，使其分别与方程的相应项对应起来。根据这种设想，我把图 4 按图 5 所示的方法分割为：一"股方"，二个"立廉"及半个"立廉"，一个"从隅"及二半"从隅"，一"隅"，隅的体积即所谓"多再自乘，半之"：$\frac{(c-b)^3}{2}$。从而不难得到以下几点结论：

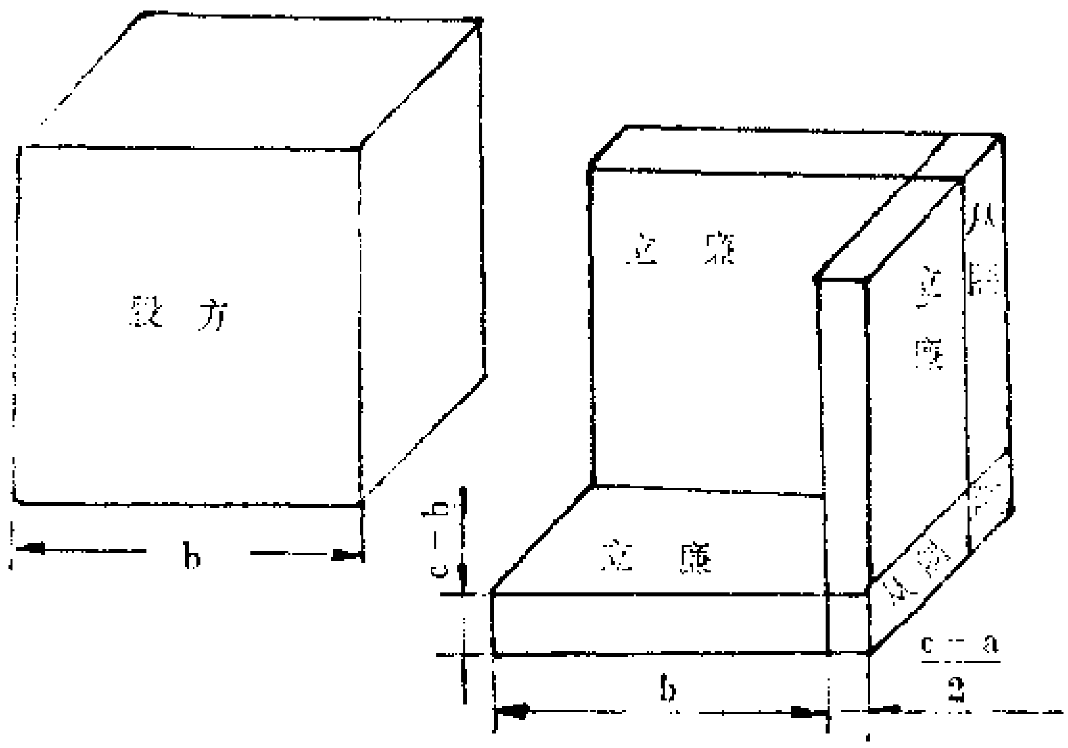



图 5

1. 图 4 所示的长方体"方"减去一"隅"即方程的"实"。

2. 股方为 $b^3$，因 $b$ 就所要求的未知数，所以股方即方程（2）的三次项。

3. 剩下的部分为两个半立廉和两个从隅。注文里还残存"横虚二立廉"，"从隅"等字，与我们的分析相合。

4. 从隅即：$(c-b)^2b$，故以 2 $(c-b)^2$ 为方法，立廉即：$(c-b)\cdot b^2$，今有两个又半立廉，故以$\frac{5(c-b)}{2}$为廉法。

又查《缉古算经》和《九章算术》一样，仍以"面"表示边，"幂"表示面积，"方"表示体积。而用"隅""廉"等表示某体积或面积的名称，甚至还可代表某线段等。所以，以上所用的表示法是与原意不相悖的。到此我们可以给出如下校补（带点字为笔者的补文，共补 47 字）。

"勾弦相乘幂自乘，即勾幂乘弦幂之积。故以倍股弦差而一，得一股与半差① 相连，乘弦幂为方。今多再自乘，半之为隅，以减立幂，余，横虚二立廉，又一半立廉，多自乘，以乘

① "半差"二字各本都放在"与"字之后，"半差"二字之后才有五个空位。钱校本依戴震校本误把"半差"放在空位之后，今改正。

股，倍之为从隅。故倍多自乘为方法。股幂乘多为上廉②，即二多并半多乘股幂。多为廉③法，故三之。二而一，从。开立方除之”④。

第十九问。原题残存“假令有股弦相乘幂”，“七问股多少”十三字；答案仅存“答曰股二十”五字；术文存“术曰幂自”“除之所得”八字。钱校本依张敦仁的校补，补足了题目、答案和术文。

题设已知股弦相乘幂 $bc$，勾 $a$，求股 $b$。

术曰：“幂自乘为实，勾自乘为方法，从。开立除之，所得又开方即股。”

由术文即有方程

$$(x^2)^2 + a^2(x^2) = (bc)^2 \qquad (3)$$

解法是：先开带从平方得一正根 $m$，再开平方 $x^2=m$，即得股 $b=x$。

由术文可推知方程（3）可能是用下面的方法而得。

因为 $c^2=a^2+b^2$

则“股弦相乘幂自乘”即 $(bc)^2=b^2c^2=b^2(a^2+b^2)$。若把股幂 $b^2$ 作为所要求的数，即可得到术文所给的方程（3）了。因此，该问的注文可补如下：

“股弦相乘幂自乘，即股幂乘弦幂之⑤数，亦是股幂乘勾幂并股幂也，令股幂数为长，以股幂求之。故勾幂为方法，从。开方得股幂，又开方除之得⑥股，此⑦分母常⑧……”

## 参考文献

〔1〕钱宝琮：《中国数学史》，1981，科学出版社，第 95 页。

〔2〕李迪：“中国数学史中的未解决问题”，《中国数学史论文集》（三），1987，山东教育出版社，第 16 页。

〔3〕〔8〕钱宝琮：《算经十书》下册，1963，中华书局。

〔4〕《缉古算经》，影印《四库全书》本。

---

② “上”字从上下文考虑疑为“立”字之误，但各本皆作“上”，故仍保留原字，说成“股幂乘多为上廉”亦可通。

③ 张敦仁《细草》本“多”与“法”之间留有空位，但未注明缺字数目；陈杰抄本注明此处“缺不过九字”；四库本“多”与“法”间留有九个空位；钱校本未留空位，也未作说明，不知何故，可能是一时疏漏。今依四库本补九字。

④ “二而一”之后，四库本以“.”号表示缺字不知多少；陈杰抄本注明“缺不过九字”，钱校本此处仅留三个空位，也未作说明。今依《缉古算经》叙述的格式补：“从。开立方除之”六字。

⑤ 四库本未注明缺字数目；张敦仁《细草》在“数”字之前留有 7 空；“股”与“为”之间空 17 位；“股”与“得”间空 12 位；“开”与“股”间空 18 位；“常”后未注明多少位。查此残文分别是“数亦是股”与“为长以股”八字两两对齐；“得股幂又开”与“股北分母常”十字也两两对齐，故所空位数可能不表示缺字数。陈杰抄本所留空位与钱校本相同，今依钱校本，在前三处分别补入 14 字、12 字及 12 字。

⑥ “开”与“股”之间，钱校本以省略号相连，不知缺字的字数，陈杰抄本注明“缺不过十一字”。今依术文补“方除之，得”四字。

⑦ “此”字，各本都作“北”，此处在“分母”之前冠以“北”字，令人不解，该字的前一字“股”字亦不缺，故把“北”与前面的文字搭配也不通，今依李俨、严敦杰的校补改作“此”，因为“此”与“北”字形相似，可能是传抄笔误。

⑧ “常”以下也不知缺字的数目，陈杰本注明缺不过十一字，以下注文可能是说明开方中的分母如何处理的问题，李俨得在此补了“开尽”二字，恐不能符合原意。查《缉古算经》其它地方均未论及这个问题，该题的术文也未涉及，所以作者的原意就无法推测，不敢妄补，只得阙疑。

〔5〕陈杰：《缉古算经图解》经文，道光庚子年（1840）重刊本。
〔6〕张敦仁：《缉古算经细草》。
〔7〕李俨：《中国古代数学史料》，1954，中国科学图书仪器公司出版（上海），第136－138页。

# 刘益及其佚著《议古根源》

特古斯
（内蒙古师范大学科学史研究所）

刘益是北宋时期一位很有成就的数学家。关于他和他所著的《议古根源》，前人已作了许多研究，不仅每本中国数学史书都有涉及，而且在不少论文里也曾提到。但人们对他的生活年代的看法不尽一致，因此还有进一步查证的必要，此外《议古根源》中流传下来的问题还有值得进一步探讨的地方。本方拟就这两个方面在前人工作的基础上作进一步调查，并力求对刘益作出一个合理的评价。

一

刘益的生活年代直到目前还不曾发现确切记载，故有不同说法，李俨先生在其《中算史论丛》中提到刘益时曾标为1080年，但没有解释。钱宝琮说："北宋徽宗政和三年（公元1113年）将河北西路定州（今河北定县）起升为中山府。杨辉称：'中山刘先生'，可见《议古根源》之作当在此后。又：明程大位《算法统宗》（公元1592年）一书附有'元丰'（公元1078－1085年）、绍兴（公元1131－1162年）、淳熙（公元1174－1189年）以来刊刻算书的书目，其中列有《议古根源》。由以上种种理由，我们可以推定，《议古根源》的写作年代当在12世纪中，恰好在贾宪（约公元1050年）之后"[1]。李迪认为"这两点理由恐怕都站不住脚。其一，'中山'之名虽起于1113年，但说刘益是'中山刘先生'的却是13世纪的杨辉，这只能说明刘益生活在原中山之地，而不能说明刘益一定生活在有中山之名以后。其二，程大位《算法统宗》所列之书目基本上是按年代顺序编排的，而《议古根源》被列为元丰年以来刊刻算书之首，当为北宋中早期之著作。又据清毕沅说：'（天禧）三年（1019年）……周怀政……伪于终南山修道观与殿直刘益辈，造符命，托神言国家休咎、或臧否大臣。'这个刘益是宋初人在元丰之前，有可能就是《议古根源》的作者。与程大位所列次序相符合。由以上几种理由，刘益当为十一世纪前中期人，至迟与贾宪同时"[2]。最近徐义保经研究确信《益古集》同《议古根源》具有承继关系，并由此得出结论认为刘益约与贾宪同时[3]。

今查得宋时刘益有三。一见《中国人名大辞典》（以下称《名典》）："刘益，宋汴人，字益之，以字行，宣和间供御，工画花鸟，尤长小景"。一见《宋史》卷475刘豫传："刘豫字彦游，景州阜成人也。世业农，至豫始举进士，元符中登第。……（建炎四年）九月戊甲中，豫即伪位，……。以第益为北京留守，寻改汴京留守"。第一个刘益《名典》没有标明出处，难以获知更多的情况。不过，《名典》收人一般都说明有何遗著，但这里只说宋汴人刘益"尤长小景"而只字不提著作，这就有可能意味着这个刘益根本就不曾著有象《议古根源》这样的书。汴梁（今河南开封）是北宋的都城，有这样可以引为自豪的籍贯，就无须再称中山人。同理，刘豫的祖籍在景州阜城（河北），他兄弟二人虽然在各地居留做官，但史称仍为景州人。因此他们即便在中山之地居留过，也不大可能称为中山人。更何况没有任何证据表明他们曾到过中山。再者，这两个刘益都是12世纪人，《议古根源》如为他们两之一所著则以程大位

的编目时序不会把它列于首位。又贾宪"有书传于世"[4]，到12世纪时增乘开方法已行世日久，如《议古根源》为此时的作品，就应充分体现这种方法的功用，但事实上并非如此。由以上种种理由可知，这两个人都不可能为《议古根源》的著者"中山刘先生"。

至于第三个刘益，在《宋史》卷466周怀政传里有三处提到他："怀政日侍内廷，权任尤盛，于是附会者颇众，往往言事获从。同列位望居右者，必排抑之。中外帑库皆得专取，因多入其家。性识凡近，酷信妖妄。有朱能者，本卓州团练使田敏厮养，为人凶狡，遂赂怀政亲信，得见，因专侍辛姚斌妄谈神怪以怵之。怀政大惑，援能至御药使，领阶州刺史。俄于终南山修道观，与刘益辈造符命，托神言国家休咎，否藏大臣。……。怀政既诛，亟遣入内供奉官卢守明、邓文庆驰驿永兴，捕朱能。刘益、李贵、康玉、唐信、道士五光、张用和悉免死，配远州。能侦知使者至，衷甲出，杀守明以叛。诏遣内殿承制江德明、入内供奉官于德润发兵捕之，能入桑林自缢死。永兴、乾耀都巡检供奉官李兴、本军十将张顺断能及其子首以献，补兴阁门祗候，顺本城都头。以刘益等十一人党能害中使，磔于市"。由此可知，周怀政是真宗皇帝宠信的近臣，朱能是附合于周怀政的亲信，而刘益则为朱能党羽中的一个重要成员。朝廷内部倾乱的结果，周怀政被杀，牵连所至，朱能入桑林上吊，刘益等被磔杀于市，这发生在刘益与朱能造符终南山的第二年，即天禧四年（1020年）。《宋会要辑稿》方域14又云："（大中祥符三年）八月二十五日滑州（今河南滑县）言大河顺道北流，诏遣职方员外郎刘益驰往设祭"。设祭与造符属于同一性质的活动，且时间上与天禧三年只隔九年，因此所指的应当是同一个人。职方是兵部所属的三个部门（职方、驾部和库部）之一，设郎中与员外郎二员，"参掌本部长二之事"。《宋史》卷163职官三说："职方郎中、员外郎掌天下图籍，以周知方域之广袤，及郡邑、镇寨道里之远近。凡土地所产，风俗所尚，具古今兴废之因，州为之籍，遇闰岁造图以进。四夷归附，则分隶诸州，度田屋钱粮之数以给之"。由此可知，职方的工作即有统计的性质，也要进行数学计算。为"周知方域之广袤，道里之远近，度田屋钱粮之数"，不仅需要进行测算面积及距离等数学计算，而且还须对各州所进局部地图进行综合处理，以取得整体数据。这就有可能意味着产生演段术的背景。因此，曾任职方员外郎的刘益应是《议古根源》的作者。刘益参与的事件多与宗教活动有关，他交接的朋友是属于道士一类的人物。占卜星象、测看风水的活动往往构成了他们生活当中重要内容，但要从事这种活动，就必须掌握"天文地理"知识，古人因此也通天算者不乏其例。又这一刘益死于1020年，在元丰之前，与程大位所列次序相吻合，很有可能就是《议古根源》的著者。因此，目前最可接受的只有李迪先生一说。另一方面下面对《议古根源》佚题的分析，也为上述见解提供了一个旁证。

## 二

《议古根源》今已失传，所幸的是于杨辉《田亩比类乘除捷法》中征引其中二十二题并"重为详悉著述"[5]得以保存到现在。《详解九章算法》勾股章内也引此书一问，但与上引一题相重，故《议古根源》现存仍为二十二题。另于《算法统宗·射》中也录有上引前六问，不过其题设与用语略有差异，推测明末可能还有此书。

《议古根源》刘益自述谓："算之术入则诸门，出则直田。议古根源，故立演段百问，盖欲演算之片段也。知片段则能穷根源，既知根源而于心无昧矣"。[6]他认为"算术"虽有各种应用，却是源出于"直田演段"，所以只有了解了直田演段方可穷根源，解蒙昧。据目前已有资

料，刘益首用“演段”二字，其后别的书也用到它，或曰条段。演者，言演化程算之功，即演示变化过程之意。段者，言田亩之片段，即大小不同的田块。所谓演段就是“演算之片段”，即借助或者通过图形的各种转换以便达到解题的目的。简言之，演段表现为造术及算法的依据。刘益深信“算之术”起源于田亩演段，为不致蒙昧不能不穷此根源，固名其书为《议古根源》。书中的演段有两种，均以图式出现。每题有“题图”，借题图演段可明了题意及各量间相互关系。与术文相应又有“法图”或谓“开方段数图”，依法图演段可知开法途径及布算程式。

《田亩比类乘除捷法》杨辉自述说“中山刘先生作《议古根源》……撰成直田演段百问，信知田体变化无穷，引用带从开方正负损益之法，前古之所未闻也”。[6]在《算法通变本末》卷上里杨辉又说：“刘益以勾股之术治演段锁方，撰《议古根源》二百问，带益隅开方实冠千古”。很显然，《议古根源》共二百问，包括直田演段百问。这是因为：一，刘益自序只说《议古根源》中设有直田百问，是要重申“算之术”出则直田，故无须提及另有别问。二，杨辉所说“撰成直田百问”不等于说撰成《议古根源》百问。三，杨辉所摘除直田十问外尚有方田圆田一问，截田（截圭田、梯田、环田及圆田等）八问，线田三问。直田摘出百分之十，其余的各摘出的比例也应大致相当。四，杨辉看过《议古根源》，他说“《议古根源》二百问”当不致有错。由上述可知，《议古根源》由三部分组成，直田百问、截田与杂田百问，均属“演段锁方”。

“《议古根源》原无细草，但依术演算亦不知其旨”[7]，因此杨辉为其所选题问“详注图草以明后学”。[8]杨辉的细草每与法图密合，当不致有违“刘君重训之意”。题图法图这些演段图应系刘益原图，而非杨辉所补。这有以下理由：一、刘益既用演段以治锁方，则演段图于《议古根源》不可或缺，因为行演段之实概以图式体现。因此《议古根源》原无细草，应只有图形和简单说明。二、杨辉深知演段之于《议古根源》的意义，绝无可能引诸问题而略其图式。三、杨辉所补“图草”中的图，系指筹算草图，所谓“开方列位图”，是在术文及演段基础上加入其细草中的。事实上，杨辉如不是念念不忘不致有违“刘君重训之意”，以其所处时代以及他所掌握的数学手段，他完全可以补上更先进的演段图式。

杨辉说他所选的这些题“可作关键题问者”“其余自可引而伸之，触类而长，不待尽述”[5]，说明这些题具有一定的代表性，因而可作为我们研究刘益的工作及其方法的依据。以下逐一介绍这些题。

前十题为直田，积 864 步。其中前三问已知阔不及长 12 步，第一问求阔。“术曰：置积为实，以不及步为从方，开平方除之”。这是开带从平方即解方程 $x^2+12x=864$ (1)，据杨辉所注图草可布式如下：

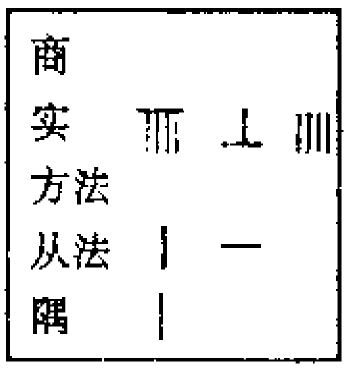


图 1

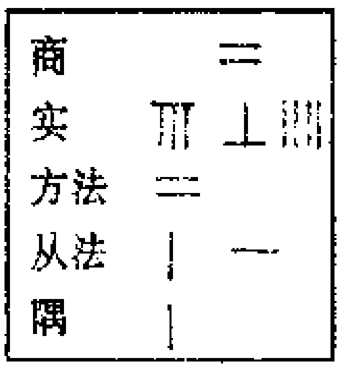


图 2

置 864 为实。实下保留方法层，摆从法 12 于方法层下。置隅 1 于最下层个位，再超一位移至百位（图 1）。议得初商 2 置于实十位之上，以之乘隅为方法（图 2）。




图 3




图 4

从法并方法乘初商除实。倍方法退一位为廉。从法退一位，隅算退二位（图 3）。

议得次商 4 置于实的个位之上，以之乘隅入廉。廉并从乘次商除实恰尽（图 4）。因得阔步 24。如令

$$x = 10x_1 + x_2$$

代入（1）式，则有

$$(10x_1 + x_2) + 12(10x_1 + x_2) = 864 \quad (2)$$

或

$$100x_1^2 + 120x_1 + 2\cdot(10x_1)x_2 + 12x_2 + x_2^2 = 864 \quad (3)$$

图 1 的意义是（3）式右及左前两项。图 3 因 $x_1=2$ 由（3）式有

$$x_2^2 + 12x_2 + 40x_2 = 224 \quad (4)$$

即其意义。（3）式尤与原题法图重合，可知杨辉不违"刘君重训之意"。

第二问求长 $x^2-12x=864$　　（5），用两种解法。"益积开方术曰：置积为实，以不及十二步为负从，以一为负隅开平方除之得长"。运筹步骤同前题完全一致，只是从隅均取负以致方法为负而从法为正（负负为正），于是就方法来说乘商后不用减法而直接用加法（变减负为加负，加负"除"实）来实现"除实"（图 5），所以叫"益积"。当议得

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 商 | | 3 | 3 | 36 |
| 实 | 864 | 864 | 324 | |
| 法 | | -3 | -6 | -66 |
| 从 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 隅 | -1 | -3 | -1 | -1 |

图 5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 商 | | 3 | 3 | 36 |
| 实 | 864 | 864 | 324 | |
| 法 | | 3 | 48 | 54 |
| 从 | -12 | -12 | -12 | -12 |
| 隅 | 1 | 1 | 1 | 1 |

图 6

$x_1=3$ 时由（以 $x=10x_1+x_2$ 代入（5）即得（6）式

$$100x_1^2 - 120x_1 + 2\cdot(10x_1)x_2 - 12x_2 + x_2^2 = 864 \quad (6)$$

有

$$x_2^2 + 2\cdot 30x_2 - 12x_2 = 864 + 360 - 900 = 324 \quad (7)$$

因得 $x_2=6$，　$x=36$。

“减从开方术曰：置积为实，以不及十二步为从，减方法开平方除之”。运筹步骤同益积术略有不同，把第四栏“廉并从乘次商除实”中的“从”提前在第三栏“倍方法退一位为廉”时并入于廉（图 6），又因从法为负，事实上是由廉减去从法，所以叫“减从”。

由（7）式有

$$x_2^2 + 2 \cdot 30x_2 = x_2^2 + 48x_2 \tag{8}$$

即此意。

第三问求长阔之和，“术曰：四因积步，以差步自乘并而开平方除之，得长阔共步”。$x^2=3600$ 的构造图形古朴巧妙（图 7），于是所求可直接得到经验，知古人开方并不拘于一法。

第四、五、六问已知长阔共 60 步，第四问求阔，需解 $-x^2+60x=864$　(9)，用益积减从二术易得 24。益积之所以成用，是因为法负，法负决定于取负隅，则负隅谓之“益隅”。“演段曰：若不益积便用减从，或有不可益积者，须用减从之术”[5]，减从之术显然比益积的用途广一些，然下问并二术而混用之，却更进了一步。

第五问求长的方程式同（9），概长宽恰为（9）式二根。“翻积术曰：置积为实，相和步为从方，以一为负隅开平方除之”。由图 8 整个运筹过程可知，“翻积虽取意于实号变负，”“翻积术”却实为益积减从术。

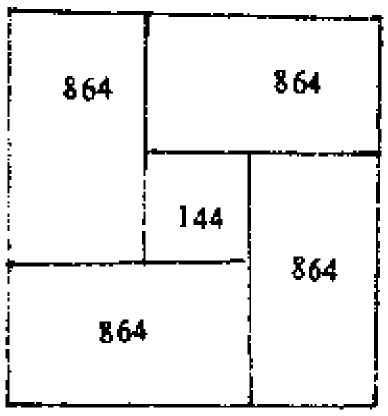



图　7

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 商 | | 3 | 3 | 36 |
| 实 | 864 | 864 | -36 | |
| 法 | | -3 | | -6 |
| 从 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 隅 | -1 | -1 | -1 | -1 |

图　8

第六问求长阔　$x^2=144$，演段同三问，得 12 非常方便简捷。

第七、八两问已知 3 长 5 阔共 228 步，求阔、求长。第九、十两问已知 1 长、2 阔、3 和、4 较共 312 步，求阔、求长。相当于如下四式：

$$-5x^2 + 228x = 2592 \tag{10}$$

$$-3x^2 + 228x = 4320 \tag{11}$$

$$-x^2 + 312x = 6912 \tag{12}$$

$$-8x^2 + 312x = 864 \tag{13}$$

其中除（13）外不曾翻积，但解法均与五问无异，故仍可称为翻积术。

第十一问为方田圆田，第十二至十九问为截田，第二十至二十二为线田。其中第十五、十九题仅及乘除未用开方算法，其余十题现以今式列下：

11 题　　$7x^2=9072$

12 题　　$\begin{cases} x^2=2025 \\ y=\dfrac{30}{75}x \end{cases}$

13 题　$\begin{cases} x^2+200x=3225 \\ y=\frac{1}{5}x+20 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} Y^2=729 \\ X=\frac{1654}{Y+20} \end{cases}$

14 题　$\begin{cases} x^2=729 \\ y=\frac{3575}{x+38} \end{cases}$

16 题　$\begin{cases} x^2=1764 \\ y=\frac{72-x}{6} \end{cases}$

17 题　$\begin{cases} 6x^2+48x=390 \\ y=6x+24 \end{cases}$

18 题　$\begin{cases} -5x^4+52x^3+128x^2=4096 \\ y=\frac{64}{x}-x \end{cases}$

20 题　$-x^2+36x=180$

21 题　$x^2=1296$

22 题　$4x^2=144$

以上诸题除第十八问外均不超过直田解法，第十八问则有些特别："圆田一段直径十三步，今从边截积三十二步，问所截弦、矢各几何"。"答曰：弦十二步，矢四步"。"术曰：四（疑为二之误）因积步自乘为实，四因积步为上廉，四因径步为下廉，五为负隅开三乘方除之得矢。以矢除倍积减矢即弦"。如设矢 x，则半弦为$\sqrt{R^2-(R-x)^2}=\sqrt{2Rx-x^2}$。由传统弧田术有 $32=\frac{2x\sqrt{2Rx-x^2}+x^2}{2}$，故开方式为$-5x^4+52x^3+128x^2=4096$。其筹算过程可记为：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 实 | 4096 | 4096 | 4096 | 4096 | |
| 方法 | | | | | |
| 上廉 | 128 | 256 | 256 | 256 | 256 |
| 下廉 | 52 | 32 | 32 | 32 | 32 |
| 负 | -5 | -5 | -5 | -5 | -5 |

图　9

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 商 | | 3 | 3 | 36 |
| 实 | 864 | 324 | 324 | |
| 法 | | 18 | 48 | 54 |
| 从 | -12 | -12 | -12 | -12 |
| 隅 | 1 | 1 | 1 | 1 |

图　10

矢既得，则易由弦×矢+矢×矢=倍积得弦 12 步。

三

由以上讨论，可以看出如下一些特色：

1.《议古根源》的处理对象以二元一次方程为主，用所谓演段术。高明的演段术及其种种妙用可使中算家卓越的心算能力得以充分施展并有合适的表现。例如第三、第六二问，只

寥寥数语得开方式 $x^2=3600$ 与 $x^2=144$，其正根 60 与 12 可轻易得自心算，其余全在演段之功，更不必多用运筹布算。另如第十二、十四、十六及第二十一问等亦当不在此例之外。刘益引进演段之术为其开方诸术提供几何模型，使之直观明了，为我国方程解法的进一步发展，及为后来天元数等方法的产生提供了有效的工具，这是不能忘记的。

2. 引用带从开方之法。所谓带从开方，就是解一次项系数不为零的方程 $x^2+ax=b$，相对于解 $x^2=c$ 式方程而言。刘益之前虽也有过不少带从开方问题，也有过 $x^3+ax^2+bx=c$（$a$、$b$、$c$ 均非负）型带从开方问题，但他们的演算细草都没有留存下来，因此刘益的演段图便成为暗示我国古代这一算法的最早记录。第一问带从开方 $x^2+12x=864$，杨辉说其"活法详载《九章·少广》"。这一《九章》不必指贾宪的《黄帝九章细算》。《九章算术》本有带从开方问题 $x^2+34x=71000$，布算时只须在少广开方术的"法"下加一从行即可，这也正是第一问的解法（图1—4）。较诸少广开方术虽多一行，但算法实质上是一致的，正如增乘法用于不同次方程而未改变实质一样。

3. 二十二个问题中隅非一者计十一题十式之多，占了半数。非一隅有正负之分，负隅又有负一与非负一之别。无论哪种情形，都是一大突破，使我国方程系数开始有了较大的任意性。由于采用负从负隅，势不可免地要在传统算法的基础上以某种形式引进益积术，如第二问。益积术虽然保持了传统开方术的程式，但正负损益之法无疑是一项创新成果，从而使可开式的领域拓展了一大步。另如第四问也用到益积术。有时对于同一问题，由于演段模式不同，就可导出不同解法。例如第二第四两问，除用益积术外还用减从术。有时不便益积也可用减从来解。此外更值得注意的是，减从术在益积术的基础上对算法程序作了有益的尝试，向增乘开方法靠近了可喜的一步。如果说减从术强化了开方算法的适应性，则第五问翻积术在此基础上集益积减从二术先进作法又前进了一步。带从开方术至此可说充分成熟、完善，用它可解任一有正根的一元二次方程。事实上后题多此术。

4. 突破数学方程次数限制，带有任意性。除带从开方式之外，尚有四次方程，依同样解法，次数犹可提高，可知刘益已能求解一般方程，这的确是一项令人注目的、杰出的成就。

前已说过，减从一步不容忽视，虽仅调整步骤一次，其意义却至关重大。顺沿这一思路仅用两步即可由减从过渡到增乘法。还以第二问为例，减从既可提前一步，自然还可考虑再前一步（图 10）。首先减从法层为（−12），再以初商 3 乘隅并入得 18 为法，又以初商乘法除实。"倍法退一位为廉"相应地变为"初商乘隅入法退一位为廉"，余同减从术（图 6）。

以上主要是横向调整算序，接下来要考虑的自然应该是纵向调序。容易看出，图 10 第二栏的步骤等价于："初商乘隅并从为法，乘法除实"（图 11）。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 商 | | 3 | 3 | 36 |
| 实 | 846 | 324 | 324 | |
| 法 | | 18 | 48 | 54 |
| 从 | -12 | 18 | 18 | 18 |
| 隅 | 1 | 1 | 1 | 1 |

图 11

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 商 | | 3 | 3 | 36 |
| 实 | 864 | 864 | 324 | |
| 法 | -12 | 18 | 48 | 54 |
| 隅 | 1 | 1 | 1 | 1 |

图 12

最后完全可以考虑把法从两行合为一，于是有图 12，不难看出，是为标准增乘法。第十八问所用正是此法，只多加上、下二廉以应次数需要，假如还有次商则加上"折而下"等步骤便与图 12 或贾宪的增乘开方法完全一致。

由杨辉所引仅此一问，可知《议古根源》较少这种解法。也许刘益并不急于表明这一方法，是因为觉得它还不充分成熟、完整或者根本就没有意识到它的辉煌前景，所求根只一位数字也正说明了这一点，在开带从平方时刘益虽然没有注意到这种作法的必要，随着开方次数的逐步提高，他似乎才找到应该在其减从术的基础上发展一套简便易行的方法，这些也许可以说明此时不曾有过贾宪增乘开方法，否则贾宪"有书传于世"[4]，刘益不会不了解其法而避简就繁，煞费苦心。这也正印证了刘益在贾宪之前，有可能就是真宗时与朱能同造备命的那个刘益。

※　　　※　　　※　　　※　　　※　　　※

刘益的直田解法循序渐进，表现出严整的系统性。但其后的截田和杂田采用算法方面显得有些混乱，问题的解法在先后的关系上看不出一个统一规律。演段用于解方程显然始自刘益，但其思想源泉却可以追溯到《九章算术》刘徽注的出入相补原理。第十八问解法还不足以显示增乘开方法的功用，在实行进一步完善之前还不能立即推广到开高次方和高次方程数值解。尽管如此，他实行随乘随加的方法，这对于彻底演进到成熟的增乘法是非常关键的一步。突破方程系数的限制，带有任意性，这在解数字方程方面的确是个了不起的贡献。

附记：本文曾受到李迪教授和郭世荣老师的悉心指导，谨此致谢！

## 参考文献

〔1〕钱宝琮主编：《中国数学史》，1981，科学出版社，第 154～155 页。
〔2〕李迪："简评《中国数学史》"，《科学通报》1965 年 11 期，第 998 页。
〔3〕徐义保："对《益古集》的复原与研究"，载本书。
〔4〕《钱宝琮科学史论文选集》，1983 年，科学出版社，第 405 页。
〔5〕杨辉：《田亩比类乘除捷法》序。
〔6〕杨辉：《田亩比类乘除捷法》卷下。
〔7〕杨辉：《算法通变本末》卷上。

# 对《益古集》的复原与研究

徐义保
（内蒙古师范大学科学史研究所）

北宋是我国传统数学发展的重要时期。根据现有资料来看，这一时期的数学成就在世界数学史上都占有地位，如：增乘开方法、开方作法本源图、正负开方术、演段术等。令人非常遗憾的是北宋时期数学家的专著没有一本完整地流传下来。蒋周的《益古集》就是其中之一。如果我们能对其进行复原，那么对于研究北宋时期数学的发展，探讨数学发展的内部规律特别是天元术的产生过程都具有重要意义。

《益古集》一书早已亡佚。除《益古演段》外，现存的中算著作没有一本记载其内容。复原《益古集》的第一手资料只有《益古演段》。

李冶在《益古演段》自序中说："近世有某者，以方圆移补成编，号《益古集》，真可与刘（徽）、李（淳风）相颉颃。余犹恨其闷匿而不尽发，遂再为移补条段，细缮图式，使粗知十百者，便得入室啖其文。"由此可见，《益古演段》源自《益古集》。

《益古演段》是金末元初数学家李冶在《益古集》的基础上"再为移补，细缮图式"而著的一本天元术入门书籍。它完成于1259年，刊刻于1282年。《益古演段》分上、中、下三卷，卷上二十二题。卷中二十题、卷下二十二题，共六十四题（其中第11题含有两问）。每题大体包括问、答、法、依条段求之①、义②、和旧术。③"法"，也就是用天元术列方程的过程；"旧术"，即《益古集》中的术；"依条段求之"是指按照"旧术条段"的形式，把"法"中用天元术求出来的方程系数表示出来。除此之外，在第43题和第55题"法"后，"依条段求之"之前还有"义"（为了同条段中的义区别，称为法义）。这个法义是说明"法"中用天元术建立方程的根据。除第44、59、60三题没有条段图，第45题图与条段图合二为一外，每题都附有题图及条段图。④《益古演段》全书六十四题中除四题⑤是解一次方程的问题外，其余都是解二次方程的问题。⑥

通过对《益古演段》的研究，本文认为可以复原《益古集》。

---

① 第44题、59题、60题没有依条段求之。

② 第44题、45题、59题、60题没有"义"。

③ 有23题另有旧术，即：第5、6、8、9、10、13、14、15、17、[illegible]、19、[illegible]、22、23、31、[illegible]、59、60、62题。

④ 第22题另有"旧术条段"，第56题另有"旧术又法图"。

⑤ 第38、44、48、56题。

⑥ 关于《益古演段》的详细介绍参见孔国平："对李冶《益古演段》的研究"，兰丽蓉、[illegible]："李冶和《益古演段》"。

# 一　复原的根据

（1）《益古演段》有23题附有“旧术”，毫无疑问，这23题都取自《益古集》。通过比较这23题根据“依条段求之”和“旧术”分别列出的方程，我们发现除第46题以外对应的方程不是所设未知数不同（相差一个系数），就是系数的表达式不一致（见表一）。我们知道这些不同就导致表示各系数之间关系的条段图不一样。因此，我们认为李冶在写《益古演段》时采取的原则是：如果根据“法”得到的“依条段求之”与“旧术”不完全相同，则把“旧术”照存，反之则删去。如：第14题有“新旧廉、从不同，开时则同，故两存之”。第15题“新旧二术不同者，旧术从简耳，算术本贵简易，而犹立新术者，缘旧术难画条段也，余仿此。”第62题旧术“四十九乘田积，如二十五而一，于头位，以至水步自乘，减头位为实，余与条段同”等等，也充分说明了这点。

至于第46题中的“旧术”可能是李冶为了把1.96乘某积定义为“展积”而留下的。虽然在第3题“义”中对“展积”下过如下定义，“凡言展积者，是于正积上，从一步九分六厘乘起之数。元法本是方面上，寄一步四分分母，自乘过，于每步上得一步九分六厘，故今命之为展起之数也”。随后第4题、第22题“依条段求之”中也有“展积”，但第4题没有留下“旧术”，第22题虽有“旧术”，它留下的原因是因为“旧术”与“依条段求之”中的未知数不一样。为什么在第46题又再次解释“展积”呢？笔者认为很可能是李冶写到第46题时，忘了前面已解释过而造成的，在《益古演段》中还有这种与贯穿全书的某一原则矛盾的例子。如第40题的“依条段求之”，前面已说过“条段皆从天元一内取出”，但这题的“依条段求之”与“法”中用天元一求出的方程不一致。

（2）从表1中我们看到“旧术”中的二次方程皆为$ax^2+bx=c$型（其中$|a|+|b|\neq0$，$c>0$）。a、b、c一般分别称为廉常、从法、实。在“依条段求之”中当$a>0$，$b>0$时a、b一般称为常法，从；当$a<0$，$b<0$时，a一般称为虚常法、益隅或虚隅，b一般称为虚从或益从。但在第33题“旧术”中把a、b分别称为常法、从；在第43题、第63题的“依条段求之”中把a、b分别称为廉常、从法。李冶把“旧术”与“依条段求之”中的名词互相混用，也说明了《益古演段》中没有注明“旧术”的题很可能取自《益古集》。由此进一步推知没有注明“旧术”的题中，它的“依条段求之”一定与“旧术”一致。正因如此，“旧术”才被删除。

（3）李冶自序称“余犹根其”（《益古集》）闷匿而不尽发，遂再为移补条段，细缮图式，使粗知十百者，便得入室啖其文。”这段话有两个关键词“再”和“其文”，从“再”字来看，李冶显然没有对原题增删，他只是对原来的“条段图”进行“移补”“细缮”。“其文”就是《益古集》中的文字。又，“客有订愚曰：‘子所述，果能尽轩隶之秘乎？余应之曰’吾所述虽不能追配作者，诚令后生辈优而柔之，则安知轩隶之秘，不于是乎始？”因此，我们认为李冶著《益古演段》有两个目的：一，使稍有数学基础的人就能看懂《益古集》。二，普及天元术。李冶在这一思想指导下自然不会对《益古集》中的题目进行删减。何况是能与“刘（徽）李（淳风）相颉颃”的著作，更不能随便删减了。

表 1

| 题号 | 依条段求之 | 旧术 | 备注 |
| --- | --- | --- | --- |
| 5 | $-x^2+6\times168x=48\times13.2\times240-3\times168^2$ | $-x^2+6\times168x=3\times(16\times13.2\times240-168^2)$ | 实的表达式不一致 |
| 6 | a) $11x^2=12\times2673$<br>b) $8.25x^2=2673$<br>c) $8.25x^2=9\times2673$ | a) $x^2=\frac{12}{11}\times2673$<br>b) $x^2=\frac{2673}{8.25}$ | 同 5<br>同 5<br>a),b) x 为内池径<br>c) x 为边长 |
| 8 | $3x^2+6\times300x=300^2-16\times13.75\times240$ | $0.5x^2+300x=(300^2-16\times13.7c240)/6$ | 系数不一致 |
| 9 | $35.75x^2+20\times330x=(2\times330)^2-81\times3168$ | $3.575x^2+2\times330x=[(2\times330)^2-81\times3168]/10$ | 同 8 |
| 10 | $-1031.75x^2-500\times342x=3420^2-2209\times3168$ | $3\times1031.75x^2+1500\times342x$<br>$=3(3420^2-2209\times3168)$ | 依条段求之<br>有错实应为负 |
| 13 | $1.88x^2+12\times15\times1.4x=4\times5000-12\times15^2$ | $0.94x^2+3\times30\times1.4x=(4\times5000-3\times30^2)/2$ | 同 8 |
| 14 | $1.88x^2-12\times35.5\times1.4x=12\times35.5^2-4\times347$ | $-1.88x^2+12\times35.5x\times1.4x=3\times71^2-4\times347$ | 同 10 |
| 15 | $4x^2+8\times152x=12(33\times240+176)-152^2$ | $0.5x^2+152x=[12(33\times240+176)-152^2]/8$ | 同 8 |
| 16 | $11x^2=16\times3564$ | a) $11x^2=3564$ x 为内方面<br>b) $x^2=\frac{16\times3564}{11}$ x 为等数 | 同 5 |
| 18 | $4x^2-8\times208x=12\times347-208^2$ | $-0.5x^2+208x=(208^2-12\times347)/8$ | 同 10 |
| 19 | $x^2+6\times172x=3\times172^2-4(33\times240+176)$ | $3.5x^2+6\times620x=[3\times(602\times2)^2$<br>$-196(33\times210+176)]/14$ | 同 8 |
| 21 | $2x^2=3\times(\frac{108}{3})^2-4770$ | $x^2=[3(108/3)^2-4770]/2$ | 同 5 |
| 22 | $-0.96x^2+2\times45.5x=1.96\times1212.75-45.5^2$ | $-0.96x^2+2\times\frac{45.5}{14}x=1212.75-(\frac{45.5}{1.4})^2$ | 同(6a) |
| 33 | $2x^2+2\times55x=4\times7300-35^2+55^2$ | $x^2+55x=\frac{4\times7300+55^2-35^2}{2}$ | 同 8 |
| 44 | (法)$15\times6+40x=240x$<br>没有依条段求之 | a) 每一步差为$(40-14.4)/200$<br>西阔 $40+15(40-14.4)/200$<br>东阔 $14.4-15(40-14.4)/200$<br>b) 西阔 $14.4+240(40-14.4)/200$ | 此为一次方程<br><br><br>同上 |
| 45 | (法)$2x^2+240=2\times13^2$ | $x^2=13^2-240/2$ | 同 8 |
| 46 | $-2.47x^2+2\times20x=1.96\times127-20^2$ | $-2.47x^2+2\times20x=1.96\times127-20^2$ | 条段、旧术相同 |
| 51 | $-0.96x^2+4\times102\times1.4x=4\times102^2-45\times240$ | $-0.48x^2+2\times102\times1.4x=\frac{(2\times102)^2-45\times240}{2}$ | 同 8 |
| 56 | $44\times63x=14(23.1\times240)$ | a) $x=(23.1\times240)/\frac{63\times22}{7}$<br>b) $44x=11(63\times2)^2-14(23.1\times240)$ | x 为实径 同 8<br>x 为池径 |
| 57 | $-x^2+(12\times45-4\times48)x=4\times8744-12\times45^2$ | $-x^2+[6(45+21)-48]x=4\times8744-3\times90^2$ | 同 8 |
| 59 | (法)$19.25x^2=11.5\times240$ | $x^2=11.5\times240/19.25$ | 同 8 |
| 60 | (法)$-10.5x^2+3402=0$ | $x^2=14.175\times240/10.5$ | 同 8 |
| 62 | $0.2304x^2+2\times19\times1.48x$<br>$=1.96(4\times240+15)-19^2$ | $0.2304x^2+2\times19\times1.48x$<br>$=\frac{49}{25}(4\times240+15)-19^2$ | 条段 1.96<br>旧术 49/25 |

(4) 祝坚在《益古演段》序中说"近代有移补方圆，自成一家，号《益古集》，大小七十问。"李锐对此说七十问是"举成数言之"。由此可知，《益古集》原书也只有六十四题。

《益古演段》第11题中的第2问显然不是出自《益古集》，因为李冶注称"此法于别纸上钞得，故录于此。"除第22题有"旧术条段"、第56题有"旧术又法圆"外，《益古演段》中的条段图哪些是《益古集》的，哪些经过李冶"移补""细缙"已不可究考。根据以上理由，我们可以基本复原《益古集》的文字部分。《益古集》的文字部分包括三个部分：问、答、术。全书六十四题。问、答与《益古演段》相同，有23题的术就是《益古演段》中的"旧术"，其余41题的术则与"依条段求之"一致。

## 二 《益古集》研究

### 1.《益古集》的作者及成书年代

祖颐在《四元玉鉴》后序称"平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《铃经》，平水刘汝锴撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也"。其中的《益古》就是李冶序中所说的《益古集》。这样《益古集》的作者就是平阳（今山西临汾）的蒋周。明程大位在《算法统宗》中所收元丰（1078—1085）、绍兴（1131—1162）、淳熙（1174—1189）以来刊刻书目中有《益古算法》。《益古集》与《益古算法》都冠有"益古"由此推知《益古集》与《益古算法》也为同一本书，只是书名稍有不同而已。正如李锐在《益古演段》跋中称"是书（《益古演段》）所称某氏《益古集》，今已亡佚不传。杨辉《摘奇》应为程大位《算法统宗》一引者）载元丰、绍兴、淳熙以来刊刻算书有《益古算法》一种，当即此书也"。

（宋）陈振孙在《直斋书录解题》卷十四中称"《应用算法》一卷，夷门叟郭京元丰三年（1080）序称'平阳奇士蒋舜元撰'"。这里的奇士蒋舜元与蒋周同为平阳人，且"奇士"与李冶评介"可与刘李相颉颃"相近，推测他们为同一人，此人姓蒋名周字舜元。称蒋周、蒋舜元都符合古人习惯。查程大位《算法统宗》所列书目，《益古算法》在《应用算法》之前，而《算法统宗》所列书目基本上是按年代次序编排的。[1]由此推断《益古集》的成书年代应在公元1080年之前。这个推断与李冶自序"近世有某者……"也不矛盾。"近世"一词所指时间的伸缩性比较大，既可以指距身处不远的时代，也可以指一、二百年以前。如南宋鲍瀚之在庆元庚申（1200）六月一日为《九章算术》写的后序中说："近世民间之本，题曰《黄帝九章》……"[2]《黄帝九章》就是贾宪的《黄帝九章细草》，按照钱宝琮先生的推测它的成书年代当在1023—1050左右。[3]照此推算这里"近世"至少指150年以前。关于蒋周的生平由于资料的限制，现尚不清楚。

### 2.《益古集》与《议古根源》的关系

北宋时期涌现了一批优秀数学家如刘益、贾宪、蒋周、谢察微等，但他们的数学著作没有一本完整地流传下来，有关他们生平的记载也只有片言只语。这给我们研究北宋数学的发展带来很大困难，对这一时期数学家之间的关系特别是刘益与贾宪，数学史界看法不一致，本

节打算通过讨论《益古集》与《议古根源》的关系来间接说明这个问题。

《议古根源》，中山（今河北定县）刘益撰，现已散佚。幸杨辉在《田亩比类乘除捷法》、(1275) 及《详解九章算法》(1261) 中引此书 22 问（同学特古斯统计），我们才能见其一隅。关于《议古根源》的撰著年代，数学史界存在争议。钱宝琮先生认为大概在 1113 年以后，[4]而李迪先生则认为在十一世纪前中期。[5]笔者认为后者的看法较切实际。理由如下：

1）杨辉在《田亩比类乘除捷法》自序中称“中山刘先生作《议古根源》……撰成直田演段百问，信知田体变化无穷，引用带从开方正负损益之法，前古之所未闻也。”在卷下又说“中山刘先生序，谓算之术，入则诸门，出则直田，《义古根源》，故立演段百问，盖欲演算之片段也。知片段则能穷根源，既知根源而于心无蒙昧矣。”从这两段话（特别是加着重号的）以及杨辉引存《议古根源》的 22 题，可以推断《议古根源》与《益古集》一样都是专明“田积变化”“方圆移补”“演段之片段”，比较一下《议古根源》和《益古集》中的问题及条段法（《议古根源》中称演段术），我们就会发现《议古根源》中的题设及条段法比较简单，没有《益古集》中的那么复杂，下面我们来看《议古根源》中条段图最复杂的一题（《田亩比类乘除捷法》卷下）。“钱田积七十二步，只云面径三步，问内方几步？……演段曰：四因钱田，变井田三段，负内方三段，有面径方积十二段，又面径乘内方十二段，比钱田又负内方一段，所以用一为益隅，开平方。”这题的演段图与《益古集》第 36 题的条段图（图 1）完全一致，但第 36 题“今有圆田一段，中心有直池水占之，外计地六千步，只云从内池四角斜至田楞，各一十七步半。其内池长阔共相和得八十五步，问三事各多少？”两题设比《议古根源》中的要复杂，且它的条段图在《益古集》中难度一般，因此，我们可以肯定《益古集》中的条段法是《议古根源》的发展。

2.《议古根源》中的问题有 5 个属于“益隅”的二次方程

$-x^2+60x=864$

$-5x^2+228x=2592$

$-3x^2+228x=4320$

$-x^2+312x=6912$

$-8x^2+312x=864$

这些二次项系数都为负整数，而《益古集》中二次方程的二次系数不仅可以是负整数，还可以是负小数（见表一）。在实数范围内，系数已没有任何限制。尽管《益古集》中正负开方术没有流传下来，但可以肯定它的水平一定不亚于《议古根源》（下面一节我们将要讨论《益古集》的正负开方术）。

因此，我们推断《议古根源》的成书年代在《益古集》之前。这样，刘益的生活年代就在十一世纪中、前期，基本与贾宪同时代。

蒋周很可能读过刘益的《议古根源》。除前面已谈及《益古集》与《议古根源》的关系外，我们还注意到中山与平阳两地距离很近，且交通方便，总之，他们之间的学术继承性是无可置疑的。

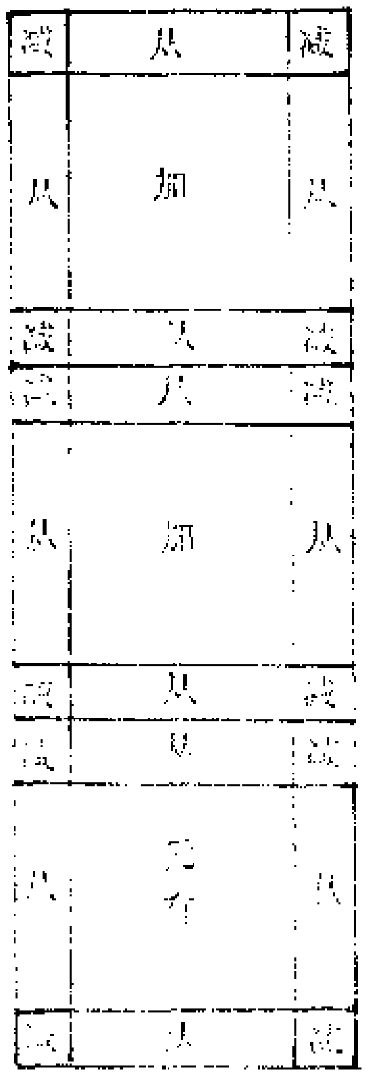



图 1

### 3.《益古集》中的正负开方术

《隋书·律历志》称“（祖冲之）又设开差幂，开差立，兼以正负参之”。这里“兼以正负参之”很可能就是指开方式的各项系数可正可负。非常遗憾《缀术》早在天圣至元丰年间就已失传[5]，我们不知道祖冲之正负开方术的具体步骤。根据现有资料来看，刘益最早使用正负开方术。此后秦九韶《数书九章》（1247）、李冶《测圆海镜》（1248）、王恂、郭守敬《授时历》（1280）、朱世杰《四元玉鉴》（1303）所引正负开方术，都本于《议古根源》。正如杨辉在《算法通变本末》（1274）中称“（刘益）带益隅开方，实冠前古。”[7]

刘益带益隅开方有两种方法，一是“益积术”，一是“减从术”。无论哪一种方法都离不开变换。

《益古演段》中记录正负开方术的只有第24题、第40题。第24题方程为

$$-17.5x^2+108x-1449=0$$

在开方过程中，议得十位数4后，“实”由负变正，“从”正变负，李冶称“倒积倒从”。在第40题

$$-22.5x-648x+23002=0$$

的开方过程中，李冶意识到这个方程“合不可开”，于是采用了连枝同体术，但这些步骤都是在“法”中出现，显然是李冶的成果。《益古集》中正负开方术的具体步骤已不可考，但从其方程系数来看，水平一定很高。现举例推测蒋周的解法。（为节省篇幅，不用筹算）

第14题：方程为

$$-1.88x^2+596.4x=13735$$

令 $x=10x_1$，有

$$-188x_1^2+5964x_1=13735$$

议得 $2<x_1<3$，变上式为

$$-188(x_1-2)^2+(5964-4\times188)(x_1-2)=13735-2\times5964+4\times188$$

即
$$-188(x_1-2)^2+5215(x_1-2)=2559$$

令 $x_2=x_1-2$，有

$$-188x_2^2+5212x_2=2559$$

方程两边扩大100倍，再令 $x_3=10x_2$，得

$$-188x_3^2+52120x_3=255900$$

解这个方程，得到 $x_3=5$，于是有

$$x=25$$

我们看到上述解法已用到了方程变换及刘益的“益积术”。今再举一例：

第18题，方程为

$$-0.5x^2+208x=4887.5$$

令 $x=10x_1$，原方程变为

$$-50x_1^2+2080x_1=4887.5$$

议得 $2<x_1<3$，于是上式为

$$-50(x_1-2)^2+(2080-4\times 50)(x_1-2)=4887.5-2\times 2080+4\times 50$$

即 $-50(x_1-2)^2+1880(x_1-2)=927.5$

方程两边扩大 100 倍，并令 $10(x_1-2)=x_2$，有

$-50x_2^2+18800x_2=92750$ 解这个方程得 $x_2=5$

于是有 $x=25$

蒋周的解法也许与上述步骤不完全一致，但可以肯定他一定用到了方程变换，可能对刘益的“益积术”和“减从术”也很熟习。

蒋周还可能运用“增乘开方法”来解上述方程。从时间和地理位置来看，蒋周有可能懂得增乘开方法。下面我们用霍纳法运算表示上面两题。

第 14 题：$-1.88x^2+596.4x=13735$

| | | | |
|---|---|---|---|
| −188 | 5964 | 13735 | 2 |
| | −376 | 11176 | |
| −188 | 5588 | 2559 | |
| | −376 | | |
| −188 | 5212 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| −1.88 | 521.2 | 2559 | 5 |
| | −9.4 | 2559 | |
| −1.88 | 511.8 | 0 | |

算得 $x=25$。

第 18 题：$-0.5^2+208x=4887.5$

| | | | |
|---|---|---|---|
| −50 | 2080 | 4887.5 | 2 |
| | −100 | 3960 | |
| −50 | 1980 | 927.5 | |
| | −100 | | |
| −50 | 1880 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| −0.5 | 188 | 927.5 | 5 |
| | −2.5 | 927.5 | |
| −0.5 | 185.5 | 0 | |

算得 $x=25$。

## 4.《益古集》中的条段法

条段法渊源甚远。早在赵爽、刘徽时期就有它的雏型—出入相补原理。赵爽运用它证明勾股定理，刘徽更应用它证明大量的平面，立体几何公式。当人们运用出入相补原理来找方程系数之间的关系时，条段法便产生了。刘徽在《勾股》章第 11 题的注中已有了条段法的思想，但这一思想没有得到很好继承，直到宋代刘益才发扬光大。在《议古根源》中，刘益已能比较熟练地运用条段法。到蒋周时代，条段法已达到完善的程度，推测当时今河北、山西一带，数学家们应用条段法的水平一定很高。祖颐在《四元玉鉴》后序中提到的刘汝锴《如积释锁》，从书名来看也可能是一部讲条段法的著作。“如积”一词在《益古演段》中是指含有未知数并与已知面积相等的面积，“释锁”指算题好象是被锁住的某一物体，必须用钥才能打开。[8]“如积释锁”大概就是指运用条段法找“如积”与已知面积的等式，建立方程。祖颐提到的另二本著作《照胆》、《钤经》也可能涉及条段法。

天元术产生以后，条段法只

用来说明，验证用天元术建立的方程，起直观、形象的作用。如李冶的《益古演段》、朱世杰的《四元玉鉴》。在《四元玉鉴》中，条段图不是在每题后出现，而是在卷首附有“四元自乘演段之图”、“五和自乘演段之图”和“五较自乘演段之图”。这三张图的意义就是用几何图形来验证代数演算的正确性以及给三次以内的一元方程和四元方程以几何解释。朱世杰可能是为了著作的简洁性和给读者以动手的机会，才把条段图归纳为上述三张图附于卷首。

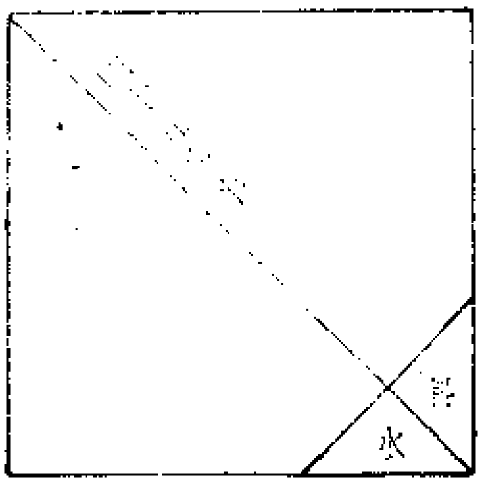



图 2

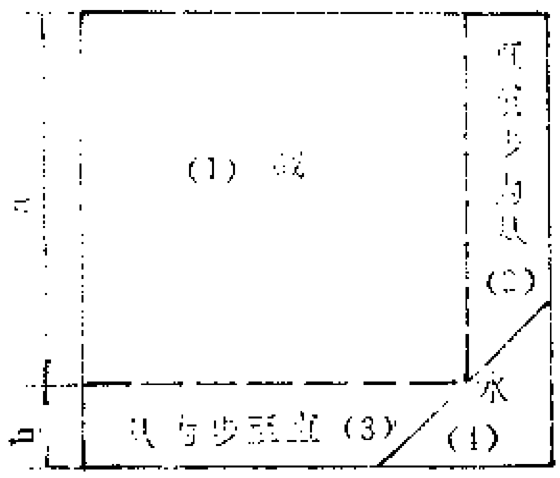



图 3

下面我们来看蒋周在《益古集》中是怎样运用条段法来建立方程的（还没有未知数）。[9]

第 22 题：今有方田一段，其西北隅被斜水占之，外计地一千二百一十二步七分半。只云从田东南隅至水楞四十五步半，问田方面多少？（见图 3）

术曰：列田积于头位，又列至步除四则直至步，以自乘，减头位余为实。二之直至为从，以九分六厘为廉，减从开平方，得二步半，加直至步三十二步半得三十五步，即田方面也。

条段图由四个部分（1）、（2）、（3）、（4）组成，设其面积分别为 $S_1$、$S_2$、$S_3$、$S_4$。欲求田方面，只要求出“直至步”a 与“直至不及方面步”b 即可。a 很容易求得，因“斜至步”为 45.5，根据方五斜七，a 为 45.5/1.4 即 32.5 步。但欲求 b 就需要运用条段法。根据术及条段图，我们推测蒋周的条段法如下：

因田方面的平方减去水占地（$S_4$）等于 1212.75 平方步，即 $S_1+S_2+S_3=1212.75$，又 $S_1=32.5^2$ 故 $S_2+S_3=1212.75-32.5^2$，$S_2+S_3$ 又比以 a 为长 b 为宽的两个长方形面积和 2ab 少，而这少的部分等于以 1.4b 为边长的正方形面积减去以 b 为边长的小正方形面积。这样 $2ab-[(1.4b)^2-b^2]=S_2+S_3$

即 $-0.96b^2+2ab=S_2+S_3$

$$-0.96b^2+2\times32.5b$$
$$=1212.75-32.5^2$$

开方得：　　$b=2.5$

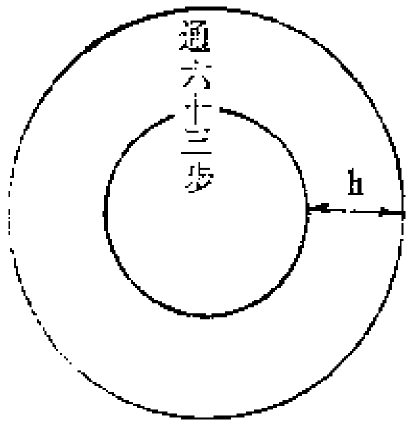



图 4

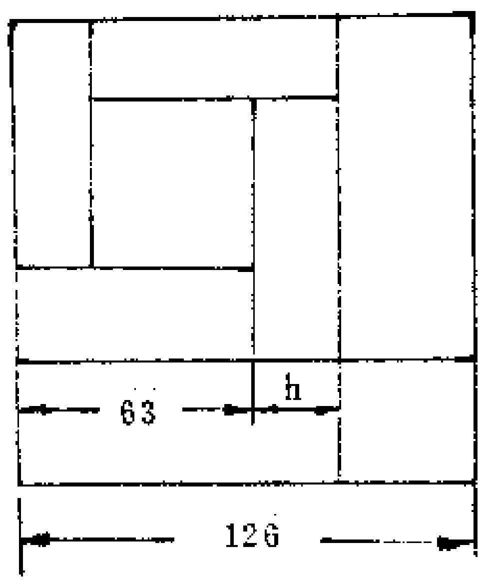



图 5

∴田方面 $=a+b=32.5+2.5=35$ 步。

我们看到上述等式的建立完全依赖几何图形的加减—条段法。下面再举一例：

第 56 题：“今有圆田一段，内有圆池水占之，外计地二十三亩一分，只云从外田通内池

径六十三步。问同前（即内外周、径各多少?）。”（图4）求又法“并通步自之，又十一之于上，以十四之积减上，余为实，四十四之通步为法，见池径”。根据术及条段图，我们推测蒋周的条段法如下：

设 $S_1$ 为大圆的面积，$S_2$ 为小圆的面积，h 为径差。则 $S_1=\frac{11}{14}(63+h)^2$（圆周率取 $\frac{22}{7}$，故 $S=\frac{11}{14}d^2$）、$S_2=\frac{11}{14}(63-h)^2$。又 $S_1-S_2=23.1\times240$ 平方步，即 $\frac{11}{14}(63+h)^2-\frac{11}{14}(63-h)^2=23.1\times240$。由条段图有 $(63+h)^2-(63-h)^2=4\times63h$

$$\therefore\quad 4\times63h=\frac{14\times23.1\times240}{11},\ h=\frac{14\times5544}{44\times63}$$

内池径 $$d=63-h=\frac{63\times44\times63-14\times5544}{44\times63}=\frac{11(63+63)^2-14\times5544}{44\times63}$$

在天元术产生以前，运用条段法来建立方程是最行之有效的方法。事实上，几乎所有二次方程都可以通过条段法来建立。在建立方程后的运算过程中，蒋周懂得寻找等积多项式及如积相消，[10]而这两步对解天元术方程是必不可少的，这就为天元术的产生奠定了基础。加之条段法本身也有局限性，对于三次方程来说条段图很复杂且需要更多的技巧，高于三次方程图就不可能画出。随着方程次数的增大就促使数学家创立新的方法—天元术。在创立天元术的过程中，还可能同时受到古代开方法的影响。[11]天元术产生在以研究条段法为中心的河北、山西一带，而没有产生在南方，说明了条段法对天元术的创立产生了很大影响。祖颐把《益古集》列为天元术产生以前的第一本著作是不无道理的。

## 三　结束语

由于北宋时期的数学著作很少流传至今，复原《益古集》的工作可能对了解当时数学内容提供了一扇的窗口。通过它可以看到在天元术产生以前宋代数学家在建立方程方面的早期思想过程，这对搞清中国古代数学发展的线索，特别是从条段法到天元术的发展过程，探讨数学发展的内部规律都有重要意义。《益古集》对我们了解正负开方术的发展史以及探讨宋代数学家之间的关系无疑也具有较高参考价值。

由于李冶根据《益古集》著成《益古演段》，这样，《益古集》在客观上起到了普及天元术的作用。

总之，《益古集》是11世纪的优秀著作，是中国传统数学的宝贵遗产。

## 参考文献

〔1〕〔5〕李迪：“简评《中国数学史》”，《科学通报》，1965年11期，第996页。
〔2〕李俨：《中国数学大纲》上册，1958，科学出版社，第155页。
〔3〕钱宝琮：增乘开方法的历史发展，载《宋元数学史论文集》，1966，科学出版社，第37页。
〔4〕同上，第45页。
〔6〕李迪：“缀术的失传时代问题”，《数学通讯》，1958年11月号，第34页。
〔7〕李俨：“中算家的方程论”，《中算史论丛》第一集，1954，中科院出版，第251页。

〔8〕严敦杰："宋杨辉算书考，"《宋元数学史论文集》，1966，科学出版社，第165页。
〔9〕孔国平：《李冶传》，1988，河北教育出版社，第114页。
〔10〕梅荣照："李冶及其数学著作"，《宋元数学史论文集》，1966，科学出版社，第142页。
〔11〕何洛："中国古代天元术的发生与发展"《数学通报》，1964年第11期，第45—48页。

# 丁易东对纵横图的研究

王荣彬
（内蒙古师范大学科学史研究所）

传说在大禹治水时，黄河里跳出一匹龙马，洛水中跳出一只神龟，各背一幅神图即“河图”与“洛书”。汉徐岳《数术记遗》中载有“九宫算”，北周甄鸾注曰：“九宫者，二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。”一般认为九宫图就是中算史上最早的纵横图。九宫图和传说的洛书原为一图，至于什么时候开始有此图，还说不清楚。

提起纵横图，人们就会想到南宋的杨辉，明朝的王文素和程大位，清朝的方中通、张潮与保其寿，其中杨辉、张潮、保其寿的工作比较突出。杨辉《续古摘奇算法》成书于1275年，载纵横图十九种，其中十三种是方阵，六种是杂形阵。杨辉因此项工作被公认为中算史上研究纵横图的开拓者，而与杨辉同时代的丁易东的工作却很少有人提及，惟李俨先生引用了他“洛书四十九得大衍五十数图”和“九宫八卦综成七十二数合洛书图”两图[1]，而且没有校正其中的传刻错误。其他一些论纵横图的文章中即使有少数涉及丁易东的工作，也都毫无例外地抄录这两例[2][3][4]。但实际上，丁易东在纵横图方面的成就远不止这两图．他的《大衍索隐》卷中就有十一个纵横图。本文将讨论其中比较重要的九个图，并试图对他的工作给予初步的评价。

关于丁易东的生卒年代和生平事迹，可依据的史料十分有限，且多雷同。

丁易东，字汉臣，号石潭。《大衍索隐》序中自称武陵人（今湖南常德市），一说他系龙阳人（今湖南汉寿县，位于常德附近）[5][6]，南宋末咸淳四年（1268年）进士。丁易东在南宋做过朝奉大夫，太府寺簿兼枢密院编修官。南宋灭后，他和一些亡朝的文人一样，隐居于常德郡东的黄龙坡，不愿在元朝做官。他在乡里修筑了精致的学舍，取名石坛，“教授生徒，远近来学者众”。郡守李彝宪多次派人请他出来做官，都被他拒绝了。郡守实在拿他没办法，于是就授予他“山长”之号，给他的学舍赐名“沅阳书院”，这说明了丁易东的书舍在当时沅江流域的影响之大。后来逢原又征授他为福建儒学提举，他还是不肯前往[7]。丁易东重义轻财，有诗《田母拒金图》云：“谓语今人知不知，偷安苟富诚何如。老万翁、志不谕，千金奋此图，此图传后世，后世重义轻金与。”

到元朝中期，常德郡监哈珊，敬慕丁易东的气节，在其书院周围种植了万余棵松树，幽雅为一时之胜。

丁易东归隐乡里，潜心研究易经，著《周易象义》十六卷，一说著《周易传疏》十卷[8]。《周易象义》是以李鼎祚及朱汉的学说为基础发展起来的，“但又谓李失之泥，朱伤于巧，故不主一家。如卦筮占卜之说则取朱子、蔡渊等。”[9]又作《大衍索隐》三卷，序中说：“呜呼！何

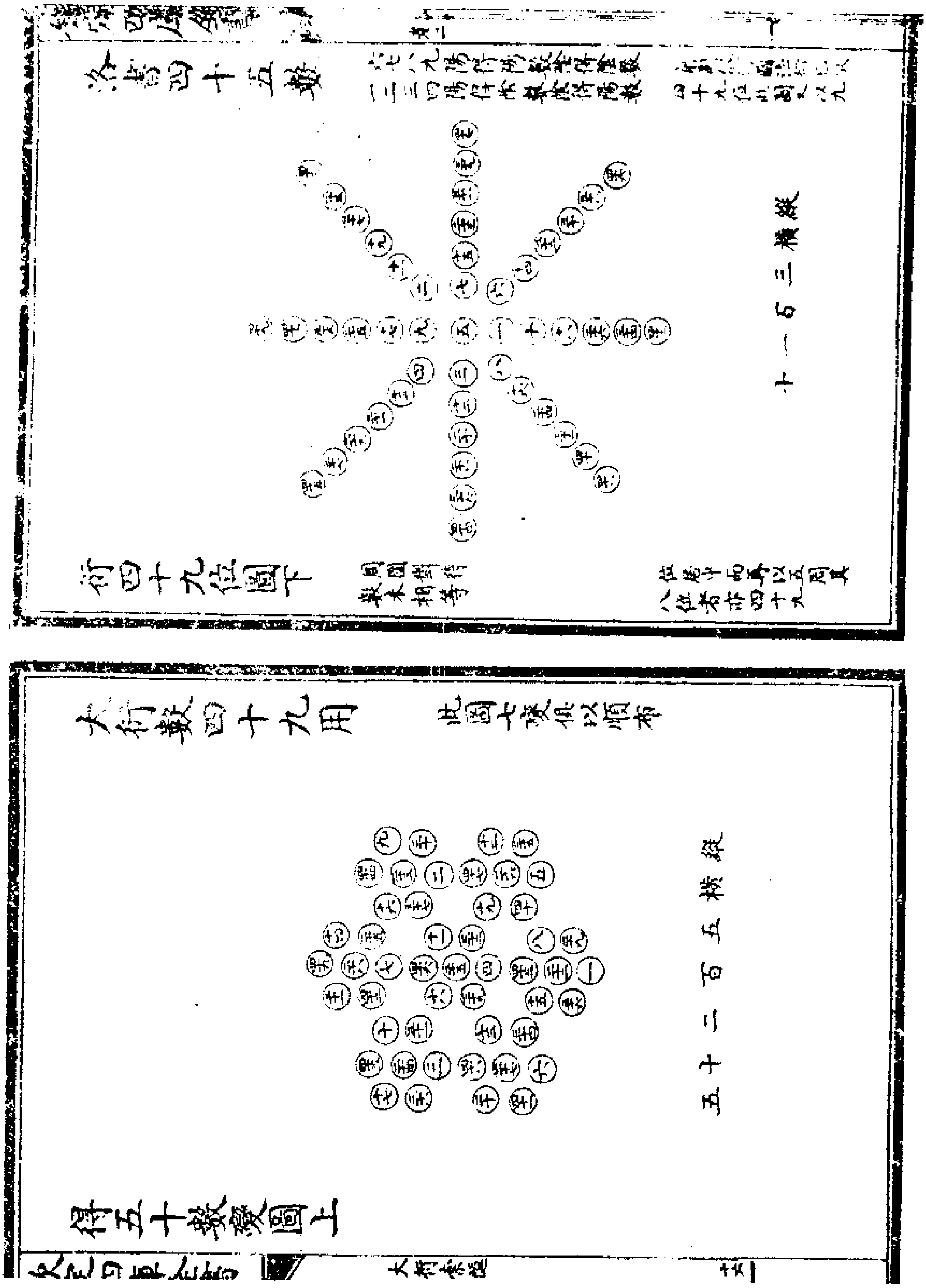



图 1 《大衍索隐》卷中书影

其数神如此，妙如此，契合如此，而古人曾未之及耶，抑尝有知之者，而其说不传耶，是未可知也”。[10]可知《大衍索隐》乃是作者为传播自己研究易经的体会而作的。《索隐》一书著于隐居期间不成问题，推其时间，南宋灭于1279年，即或二、三十年后成此书，也不晚于1300年。

《大衍索隐》三卷。卷上“原衍”，主要解释“大衍之数五十其用四十九”的来历，其中使用了等差级数来进行推证，独辟奚经。他在序中说：“以管见求之，亦既得其说之一二矣，而犹以为未也。思之，思之而又思之，一旦豁然，若有遭于神明之通者。然后知五十、四十九皆天地之数合而衍之。”

卷中“翼衍”，研究“河图”，“洛书”之数与大衍之数的关系，又从另一角度去解释大衍之数五十、四十九的奥秘。“以天一至地十合而衍之，此一说也；以河图、洛书五而衍之又一说也；以河图、洛书乘数再自乘而除之又一说也。”“余既列前图为原衍，而二说亦先儒所未及，故不忍弃置，复为此编，且以先天八卦，洪范九畴之合大衍者列之，而洛书之变终焉，名翼衍。”这段话意思是说，上卷以天一至地十之数推衍，这是一种方法；而此卷用河图、洛书数推衍，又是另一方法，二者异曲同工。而用河图、洛书数推衍的二种方法都是他之前的易学家们所没有论及的，虽然是在讨论同一问题，但方法不同，故不忍心弃之，又作中卷。他又说：“而其说艰深，非精于数者不能遽晓焉。”证明作者在数术方面的造诣很高。就在中卷里，作者构造了许多纵横图，在组合数学史研究方面具有重要意义。

卷下“稽衍”，是继前两卷之后，接着介绍其他五十七家有关学说，主要是为教学所用而作。自序中说：“余得而考之者凡五十七家，其言数也，非不可通率，多牵合传会。余既成原衍、翼衍二书，惧学者迷旧说而昧其指归也，复叙次诸家之异，折衷而为是。”

第一组

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 44 | | | 49 | | | 42 | |
| 34 | 4 | 24 | 39 | 9 | 29 | 32 | 2 | 22 |
| | 14 | | | 19 | | | 12 | |
| | 43 | | | 45 | | | 47 | |
| 33 | 3 | 23 | 35 | 5 | 25 | 37 | 7 | 27 |
| | 13 | | | 15 | | | 17 | |
| | 48 | | | 41 | | | 46 | |
| 38 | 8 | 28 | 31 | 1 | 21 | 36 | 6 | 26 |
| | 18 | | | 11 | | | 16 | |

图2 洛书四十五数衍四十九用图

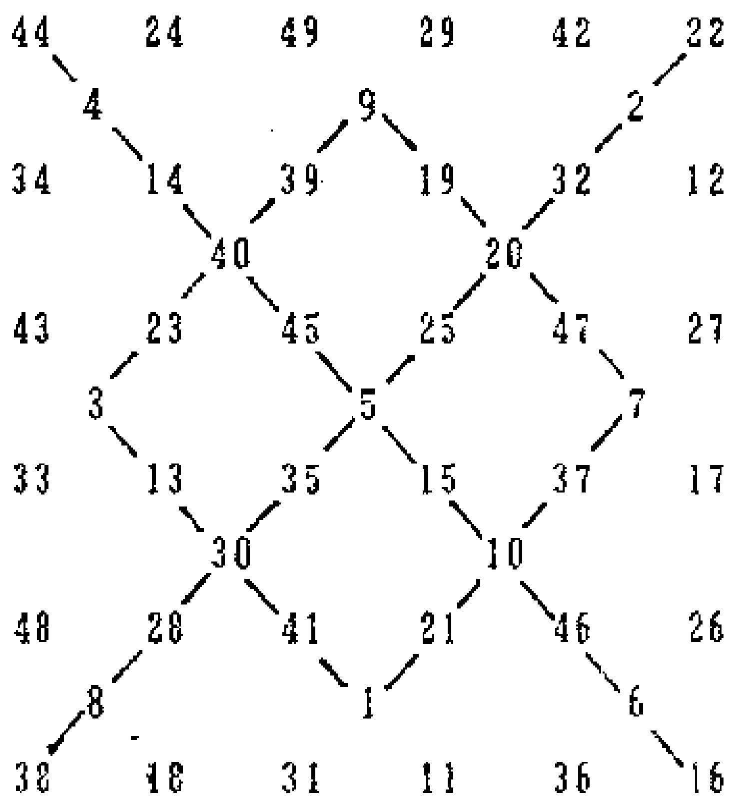



图3 洛书四十五数衍四十九位图上

《大衍索隐》中卷是从数术的角度出发研究易经问题的，虽然不是研究数学的专著，但其中的纵横图构造巧妙，图中的数字一数可兼两用，或兼三用，甚至一数兼多用。《索隐》中卷

的纵横图以杂形阵为多，也有方形阵。作者对有些图还提示了造法，不过仍没有通用的法则，还是一图一法。下面就分四组说明之，书中原图都是用中文数字排列的（见所附的书影），现都改为阿拉伯数码，并校正了其中一些排版错误，不再一一说明。

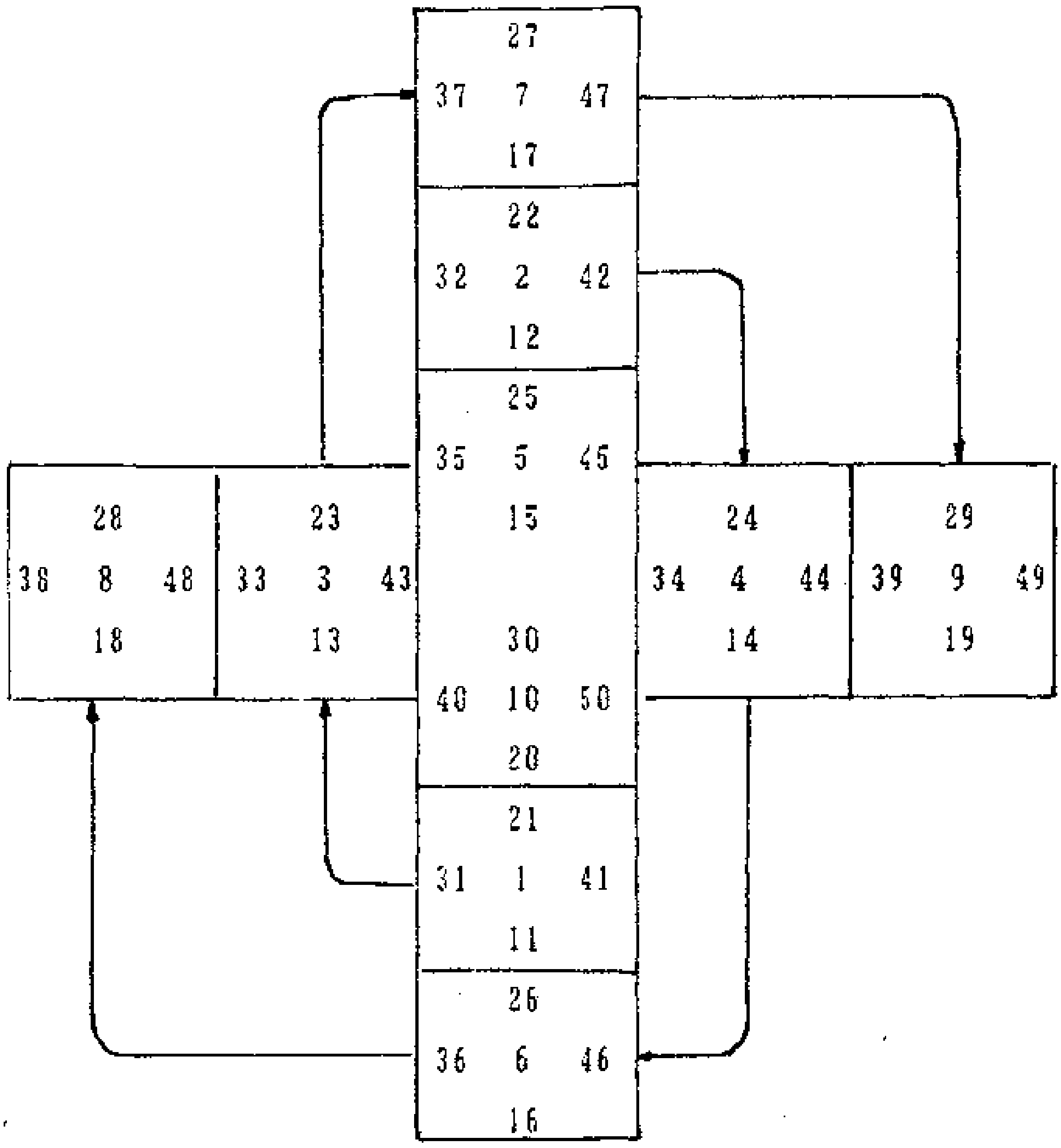



图 4　河图五十五数衍成五十位图

图 2 中若把每个中心数及其周围 4 数作为一组，则有纵横斜每三组和皆为 375；又纵横各条线上 9 数之和皆为 195。图 3 的两条对角线及棱形（包括中心）上的数字之和相等，和为 245；纵横每三组的 15 个数字之和都是 375。图 4 每组的中心数即构成河图，如图中箭头所示的 4 组数字之和皆为 500。

以上三个图的构造方法相似，都是在中心数的四周添上个位数等于该中心数的四个数字，图 2 实际上可变为三阶方阵（图 5）。丁易东造这三图的目的是为了附会大衍之数五十出于河图，其用四十九源于洛书。图 2 虽然只用了四十五位，但其中在 9 与 11 之间，19 与 21 之间，29 与 31 间，39 与 41 间分别省去了 10、20、30 与 40 等 4 位，丁氏认为“盖虚包四位也”，故为“四十九用图”。图 3 则进一步把虚包之四位衍出。图 4 是在河图的基础上构造的，关于如何把河图看作纵横图的问题，李约瑟作了解释[11]（图 6），但这种解释恐与河图五十五数之说不相符，因为他把河图原中心的数字 10 丢掉了，蒋术亮也采用了与李约瑟同样的排法[12]。笔者则认为把河图排成图 4 中的中心数所示的形式更能与原图相符。

| | | |
|---|---|---|
| 120 | 145 | 110 |
| 115 | 125 | 135 |
| 140 | 105 | 130 |

图 5

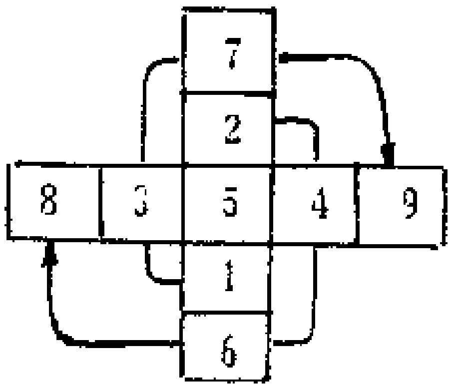



图 6

**第二组**

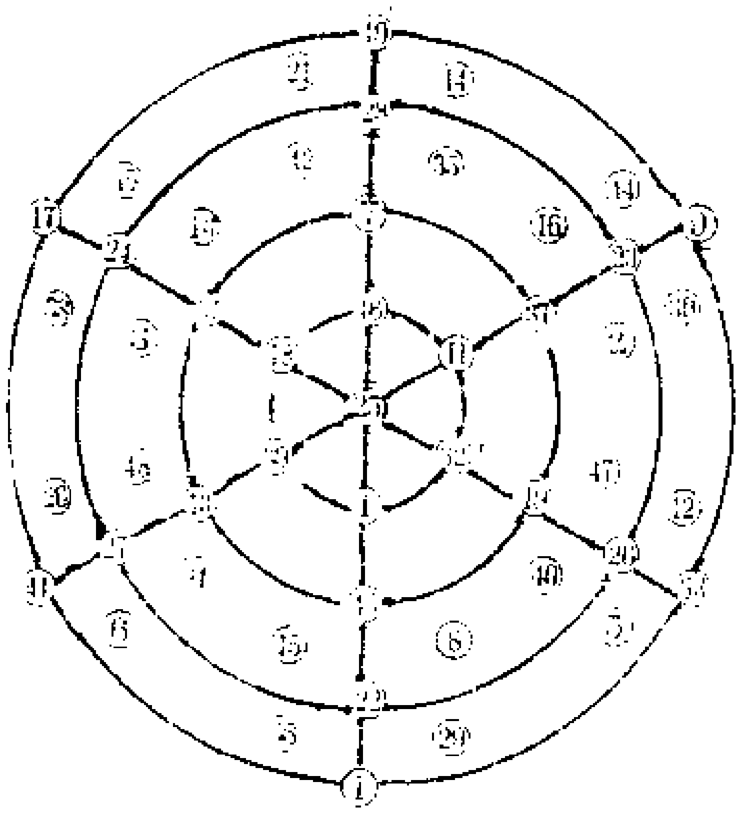


图 7　大衍数四十九得五十数变图上。

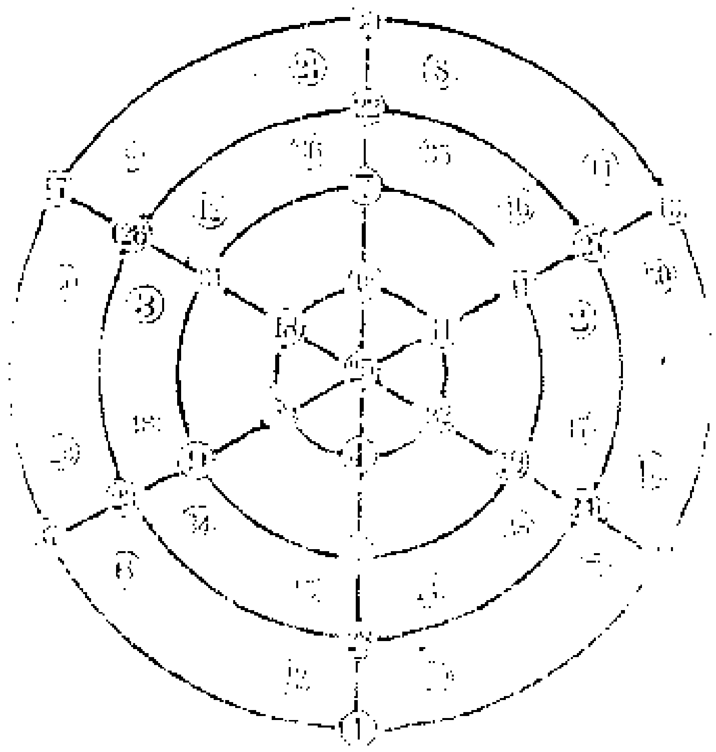


图 8　大衍数四十九得五十数变图下。

图 7 每条直径上的三组数之和相等，均为 525；每条线上的 9 数和皆为 225；同心圆上每圈 6 数之和皆为 150。图 8 与图 7 具有同样的等和性质，即每条直径上的三组数之和均等于 525，每条直径上数字和都是 225，同心圆上每圈 6 数和均为 150。

丁易东对图 7 和图 8 都暗示了造法。图 7 中注有“此图七变俱以顺布”等字样，作者的意思可能就是：把“1—49”这 49 个数按自然顺序分成 7 段，然后按图 9 所示顺序分别把每段的 7 个数填入图中的七个组中相应的位置。图 8 中则有“此图七变一顺一逆”的字样，就是把上面所说的 49 个数分成 7 段后，再把每段的 7 个数按图 10 所示的顺序，先依实线方向，再按虚线方向，分别填入图中的七个组内。

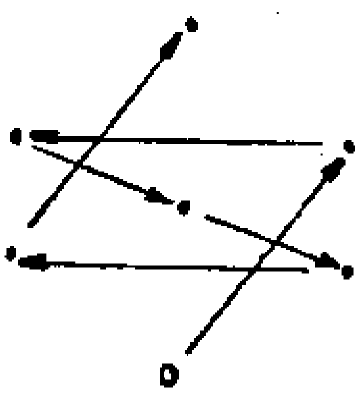


图 9

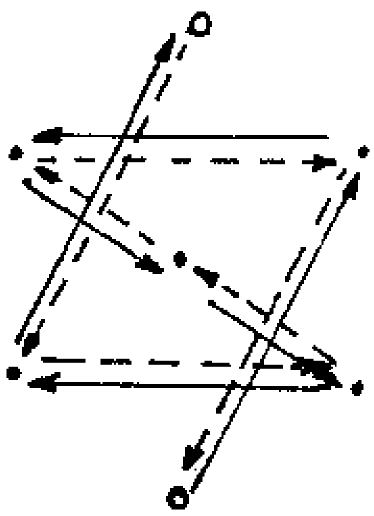


图 10

## 第三组

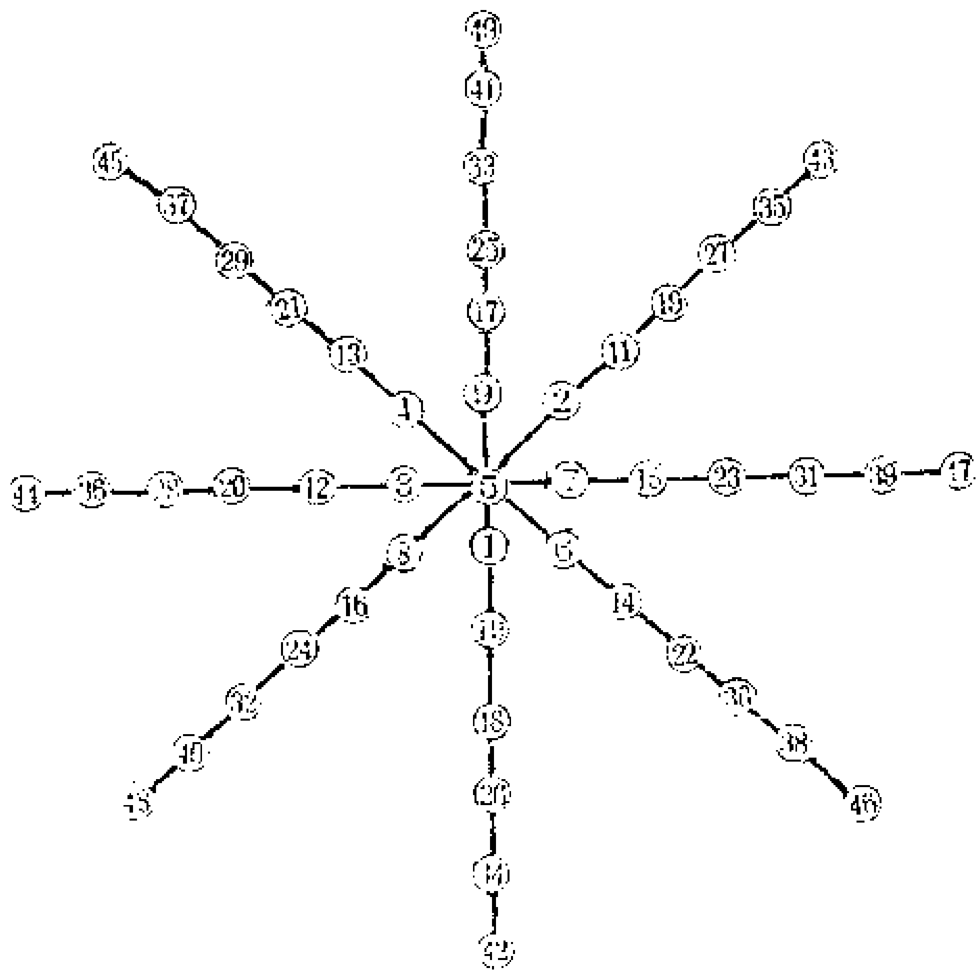


图 11　洛书四十五数衍四十九位图下

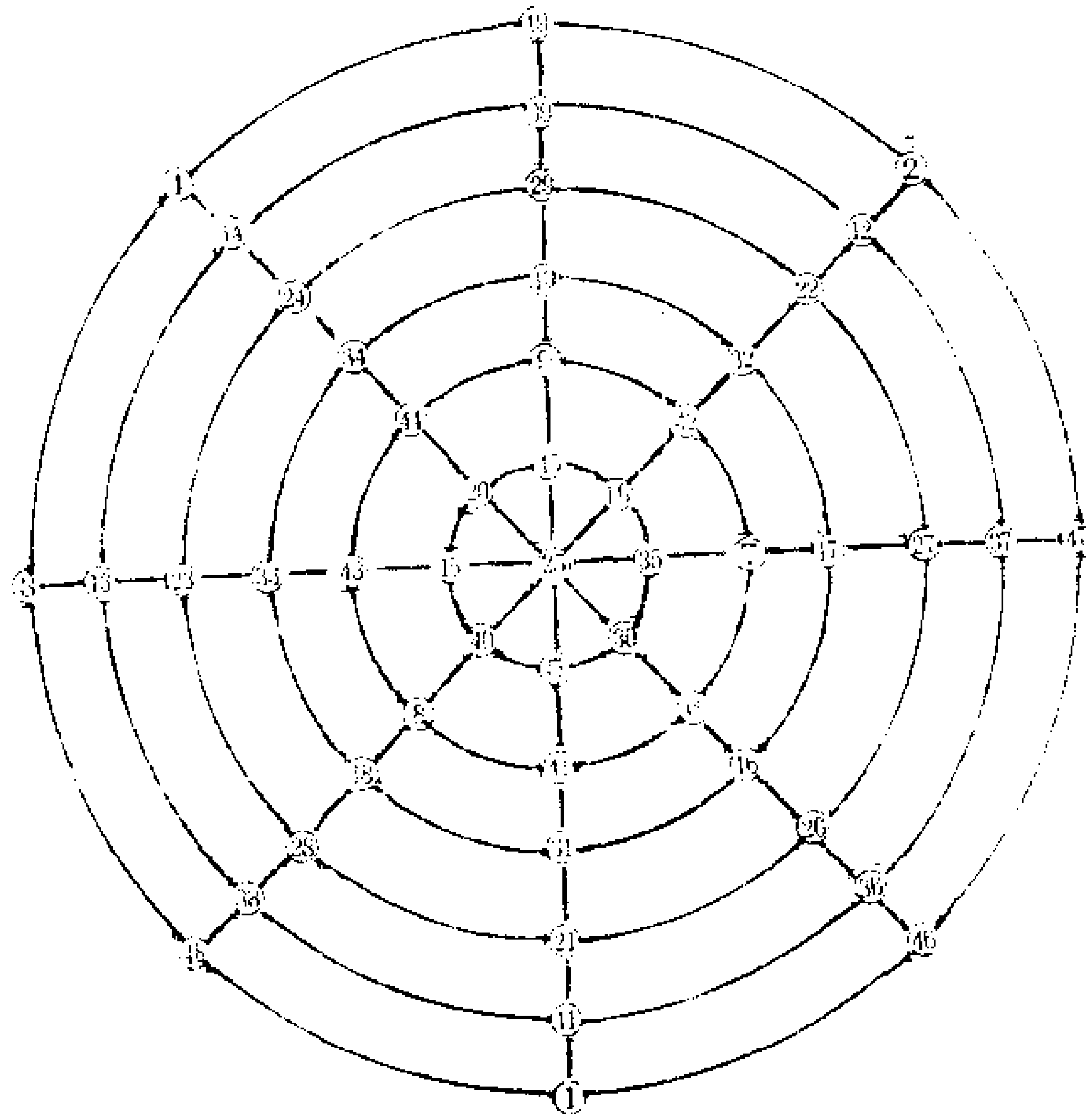


图 12　洛书四十九位得大衍五十数图

在图 11 的两旁作者有注释曰："此图又以九位，而再从五周其八位者，亦四十九，周围对等之数未相等。"该图具有每条直线上的 13 个数字之和相等的性质，均为 310。但是周围处于同一圆圈上的 8 个数之和、每条线上关于中心数对称的两数之和都不相等。图 12 中作者也有说明："今以洛书之法，纵横等布遂成此图，其位虽四十有五，而对位之数合成五十。周围各二百周围各中位二百二十五，对位各五十，对位各中位七十五。"就是说此图每周 8 数之和皆为 200，若加中位，则皆为 225，关于中心数对称的两位数之和都为 50，若加中位则为 75。除作者所指出的等和关系外，还有每条线上的 9 数之和皆为 325。

图 11、图 12 的形状和杨辉的"攒九图"形状相似，其中图 11 不如攒九图优越，因为中心数周围每圈的 8 个数字不等和。而图 12 除具有攒九图各直线及周围上的数字等和规律外，还具有关于中心数对称的两数等和的性质。作者在图 12 中的注释已明确地说明了该图的造法，即按"洛书之法"。不过他是以个位数字为考虑对象，从图 12 中可见，第二圈开始，每圈上的数的个位都符合"二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一。"虽然作者没有说明图 11 的造法，但仔细研究一下，不难发现其构造方法是：把 10 至 49 之间的数字分为 5 段，每段 8 个数按洛书中数值的大小顺序排成五周，即成图 11。

第四组

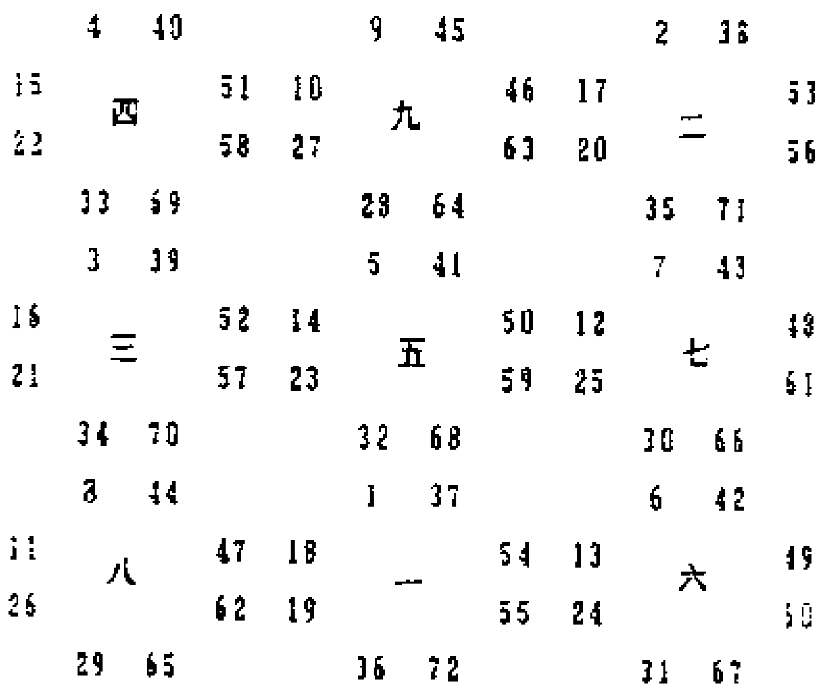



图 13　九宫八卦综成七十二数合洛书图

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 76 | 13 | 36 | 81 | 18 | 29 | 74 | 11 |
| 22 | 40 | 58 | 27 | 45 | 63 | 20 | 38 | 56 |
| 67 | 4 | 49 | 72 | 9 | 54 | 65 | 2 | 47 |
| 30 | 75 | 12 | 32 | 77 | 14 | 34 | 79 | 16 |
| 21 | 39 | 57 | 23 | 41 | 59 | 25 | 43 | 61 |
| 66 | 3 | 48 | 68 | 5 | 50 | 70 | 7 | 52 |
| 35 | 80 | 17 | 28 | 73 | 10 | 33 | 78 | 15 |
| 26 | 44 | 62 | 19 | 37 | 55 | 24 | 42 | 60 |
| 71 | 8 | 53 | 64 | 1 | 46 | 69 | 6 | 51 |

图 14　洛书九数乘为八十一图

图 13 中作者自己说："每宫二百九十二，中合四宫亦各二百九十二，纵横八百七十六。"即是说此图的九宫（即由 8 个数围成的九个圈）中间又合成了四宫，共十三宫，每宫之数的和相等，皆为 292，纵、横、斜每三宫之数的和亦相等，和为 876。此外，纵横相邻两行（列）的 12 个数之和相等，皆为 438，每宫的中心数即构成洛书，若包括中心数的话，则纵、横、斜之和皆为 891。

图 14，作者也把图 14 分割成 9 个三阶的方形阵，把每个小方阵都称作一宫。他在该图的上下方注释中指出："一宫纵横一百一十一，中位三十七；二宫纵横一百一十四，中位三十八；三宫纵横一百一十七；中位三十九；四宫纵横一百二十，中位四十；五宫纵横一百二十三，中位四十一；六宫纵横一百二十六，中位四十二；七宫纵横一百二十九，中位四十三；八宫纵横一百三十二，中位四十四；九宫纵横一百三十五，中位四十五；每三宫纵横一千一百七。"

除了作者指出的等和关系外，还有很多等和性质，如：纵横斜每9数之和皆为369，每空的9个数字之和亦为369等等。

图13和杨辉的连环图相似，此图不仅每宫8数等和，且9宫衍为13宫，十分巧妙，是丁氏纵横图的一个高峰。作者虽没有提及该图的造法，经过反复推敲，我们还是发现了其中的奥秘：首先排好洛书（如图中所示的大写数字），然后在各数的左上角重复排上该数；再紧接着9排10，洛书的数字递减，而纵横图中所要排的数递增，到18止；从19开始又变为洛书数字递增，所要排的数字也递增，直到27；用排10至18的同样方法再排28至36。接下来再排每宫的右半，在"一"的右上角排37；仍依上面所述的方法，一次俱增，再一减一增，排到72为止。

图14乃9阶方阵，方形阵的要求十分严格，其中具有相当多的等和规律，是纵横图中最妙的一种，因而图14就代表了丁氏纵横图的最高成就。文中所引的注释证明丁易东是把这个9阶方阵看作是三阶方阵的复形。构造方法可能如下：把81个数分为9组（如图15所示），每组的中位数作为各三阶方阵的中心，再用相应的"数序"之数码，按洛书所谓"二四为肩，六八为足…"的次序排列成九个三阶方阵。最后再把一至九宫，以每宫的最小数字为准，仍按洛书的顺序排列，即成此图。

| 组序 / 数序 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| 2 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | |
| 3 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | |
| 4 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | |
| 5 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 中位 |
| 6 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | |
| 7 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | |
| 8 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | |
| 9 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | |

图15

前已述及，《大衍索隐》卷中的纵横图是从河图、洛书之数与大衍数的关系的角度来探讨易经中五十、四十九数的来源问题，而不是研究纵横图的数学专著。其书在易学中的地位已不是本文的讨论范围，但其中早期的纵横图工作，在数学史上具有重要意义。

据本文的推测，《大衍索隐》可能晚于《续古摘奇算法》。勿庸讳言，他在纵横图方面的成就也不及宋元四大家之一的杨辉，加之他的工作又与易经联系在一起，这些可能是丁氏图在数学史上被忽视的部分原因。虽然丁氏纵横图都基于河图、洛书（这是他的工作的鲜明特点），且杂形图居多，但其造法十分巧妙，其中也有方形阵，方形阵的最高阶为九阶，杨辉最

高阶的方阵也不过就是十阶的“百子图”。又丁氏的风格独特，在时间上则早于程大位、方中通等，与他们相比丁易东图还是具有相当高水平的。所以现在看来，应予重新评价。尽管他的纵横图是研究易经的副产品，但其在组合数学史上的贡献是不可否认的。

严敦杰先生指出：“忠辅字德之，河南人。造统天历为元郭守敬授时历所本。又丁易东与杨忠辅约略同时。丁易东《大衍索隐》卷一：‘未几得河南杨氏大衍本原’。《大衍索隐》有纵横图。疑杨氏书亦有是项图录，其后杨辉所论纵横图，知有渊源焉。”[13]严敦杰把杨忠辅与丁易东放在杨辉之前，认为杨辉在纵横图方面的工作源于丁易东等人。若如此，则丁氏工作的地位与意义应在杨辉之上。不过严氏并未给出这种先后关系的有力论据，而笔者这里能得到的结果又与之不同，故还不能定论。

最后还有一个问题。李俨所举的两图分别与杨辉的“攒九图”和“连环图”相似，值得注意的是丁易东的“洛书九数乘为八十一图”与杨氏的“九九图”完全相同，它们之间的关系有待深入研究。查丁氏与杨氏是同时代人，丁易东隐居常德后，与在千里迢迢之外的钱塘杨辉并无联系。所以我们认为不论从时间、地域上来看，还是从上面所说的风格上来看，丁氏的工作都应是独立的。他与杨辉相似的两图（图 12 与图 13）的构图方法也与杨氏的完全不同，而那个九阶方阵，丁易东是从洛书出发，由九个三阶方阵复合而成，也与杨辉的方法不同。总的来说在他那个时代，丁易东在组合数学方面的工作在中国乃至世界上都具有先进水平，把他称作“十三世纪的中国组合数学家”，我们认为是可以接受的。

志谢：此项研究得到了李迪教授以及马月华老师的帮助，特此致谢！

## 参 考 文 献


[1] 李俨：《中算史论丛》第一集，1954，中国科学院出版，第 175～229 页。

[2] 戴文赛：“纵横图”，《科学大众》，1951 年，10 月号。

[3] 傅溥：《中国数学发展史》，1982，（台湾）中华文化丛书，第 230 页。

[4] 张怀古：“九宫——洛书——纵横图”，《人民日报》1957 年 12 月 9 日。

[5] [8]《新元史》卷二三五。

[6] [9]《四明丛书》第五集，卷三十七，“宋元学案补遗”。其中注明它所述的内容是据《湖广总志》所载。

[7]《元书》卷九十一，“隐逸传”上。

[10] 丁易东：《大衍索隐》“原衍”序。

[11] 李约瑟：《中国科学技术史》中译本，第三卷，1978，科学出版社，第 126 页。

[12] 蒋术亮：《中国在数学上的贡献》，1984，山西人民出版社，第 92 页。

[13] 严敦杰：“秦九韶年谱初稿”，《秦九韶与〈数书九章〉》，1987，北京师范大学出版社，第 13 页。

# 朱世杰的"多次立天元法"*

王艳玉

(邮电部机关服务中心)

宋元时代，出现一种列方程的普遍方法，这就是"天元术。"。"天元术"最初产生于山西、河北一带，《四元玉鉴》(1303) 祖颐后序中称："平阳（今山西临汾县）蒋周撰《益古》，博陆（今河北蠡县）李文一撰《照胆》，鹿泉（今河北获鹿县）石信道撰《钤经》，平水（今山西新绛县）刘汝谐撰《如积释锁》，绛人（今山西冀城县）元裕细草之，后人始知有天元也。"祖颐后序提到的这些数学著作，已全部失传。在流传至今的数学著作中，最先使用天元术的乃是李冶，他的著作有《测圆海镜》(1248) 和《益古演段》(1259) 二部。

关于多元术问题，祖颐序称："平阳李德载因撰《两仪群英集臻》，兼有地元；霍山邢先生颂不高弟刘大监润夫撰《乾坤括囊》末仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生演数有年，探三才之赜，索九章之隐，按天、地、人、物立成四元。"说明在朱世杰之前，已出现二元术、三元术，但四元术仅见于《四元玉监》中。多元术的出现，为解决高次方程组开辟了一条新路。朱世杰从天元术发展到四元术，其中经历了"多次立天元"的思想过程。

1. 多次立天元法。

运用方程求解实际问题，一般需要分两步进行。首先要根据问题给出的条件列出包括未知数的方程，其次是解方程求根。十二世纪以后的中国，已经出现求解任意高次方程的"正负开方法"，同时也出现根据问题给出的条件列方程的方法。一般说来，在没有一种普遇的方法之前，列方程并不容易。

到了北宋时期，数字方程解法有了新进展，杨辉的著作中徵引了这一时期的一些重要成果。据现有资料，贾宪著有《算学敩古集》、《黄帝九章细草》和《释锁》，但都已失传。刘益著有《议古根源》。对于高次方程数值解法，贾宪建立了一种新方法"增乘开方法"。贾宪把新方法的一次项系数叫做"方"，有时称"廉"。贾宪的方程最高为三次，其"增乘开方法"的特点：议得每位商之后，先以商乘下法，再"入方"，即把乘得的积加入"方"内。这样，每议得一位商数，就乘一次加一次，随乘随加。刘益的方程最高达四次，系数无限制。首项系数可正可负，同时次数可以带有任意性。刘益在解四次方程 $-5x^4+52x^3+128x^2=4096$ 时所用方法与增乘开方法一致。由于刘益的方程，系数无限制，在解决数字方面又进了一步。

宋元时代出现了天元术，所谓天元术，即"立天元一为某某"，也就是"设 $x$ 为某某"。天元术的表示法最初很繁，多项式各项系数分别使用不同名称。例如一次项以上各系数分别用"天、上、高、层、垒、汉、霄、明、仙"表示 1—9 次项系数；常数项用"人"；常数项以下

* 本文是笔者在内蒙古师范大学硕士学位论文的一部分。

为负数次幂，最低为负九次，分别用“地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼”表示。后来，天元式逐渐简化，到李冶时，有古法图式和今法图式两种，都把“太”放在中间，表常数项。按古法图式，天元在上，地元在下，以天元代表未知数的正一次幂，以地元代表未知数的负一次幂。今法图式的顺序与之相反。这较之各次幂都用不同字表示的方法要简便得多。

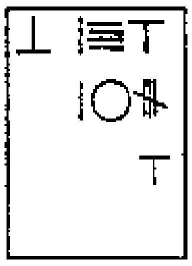
李冶《测圆海镜》中进一步简化了天元式。天元式改用一个“元”或“太”字表示一次项或常数项。在一个等式中用“元”不用“太”，用“太”不用“元”。《测圆海镜》中是由高次幂向低次幂上下排列，《益古演段》的排列顺序则颠倒过来。

宋金元时代由于水利工程的需要产生了许多数学问题。沙克什（又称瞻思，1278—1351）于元至治元年（1321）重订《河防通议》二卷，其中有一题是用天元术求解。元代郭守敬（1231—1316）等人所著的《授时历》（1280）中，在解决高次方程数值解法时也用到了天元术。

朱世杰的《算学启蒙》、《四元玉监》广泛使用天元术，并创造了四元术，使天元术不断完善。《算学启蒙》中的天元术形式较以前更加灵活，而且运用自如。

(1) 天元式写法的简化。

在《算学启蒙》“开方释锁门”中，天元式依然采用李冶由低次项向高次项上下排列的方式，与其不同的是：在筹式中将“太”或“元”去掉，仅列出筹式。例如：



即表示 $7x^2-103x+6156$

朱世杰所列筹式的特点：最上位是常数项，即“实”，依次往下为一次项系数、二次项系数……，如果其中某项系数为零 0，就在其位置上用 0 表示。按照此法，很容易知道筹式表示什么，而无需用“太”或“元”来表示。

如果出现负次项，又如何表示？朱世杰给出的方法是：立天元一为最高负次项。也就是关键在于立天元一为怎样的变量才能使方程不出现负次幂。例如，“开方释锁门”第 29 题：

“今有方锥积九千四百八尺，只云高为实，平方开之得数少如下二十二尺，问下方及高各几何？”

假令高为 $h$，下方为 $a$，由题意可知：

$$\begin{cases}\sqrt{h}+22=a\\ \frac{1}{3}a^2h=9408\end{cases}$$

对于此种含无理式的方程，术文曰：“立天元一为开方数”。即设 $x=\sqrt{h}$，通过变量代换将无理方程化为正次幂方程。类似例子，书中还有很多。

因此，朱世杰的高次方程表示法具有一般性，实际上他已经给出形如：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

的方程式。朱世杰给出的筹式表示法已经摆脱了文字的束缚，使筹式表示方程达到了顶点。

关于如何求解高次数值方程，朱世杰只给出“开平方法”、“开立方法”两种，“开平方法”类似于《九章算术》中的开方法；“开立方法”与贾宪“增乘开方法”一致。对于更高次

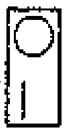
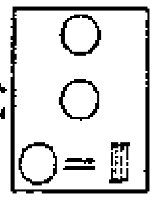
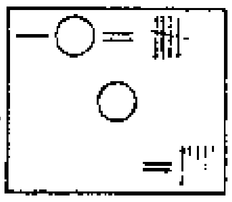
的方程，朱世杰没有给出具体解法，只是说“三乘方翻法开之”、“四乘方开之”等等。

(2) 朱世杰的假设法。

《算学启蒙》“开方释锁门”中，朱世杰为计算方便，采用了多种形式设未知数的方法，并大量使用“替代法”，亦即假设一个中间变量。例如该门18题为：

“今有直积一千二十四步，只云平除长、长除平二数相并得四步二分半，问长平各几何?”若假设长为$a$，平为$b$，由已知条件可知：

$$\begin{cases}\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=4.25\\ab=1024\end{cases}$$

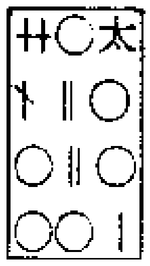
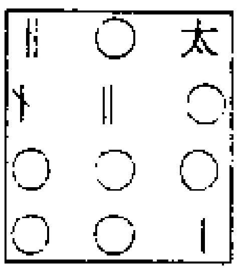
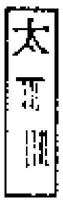
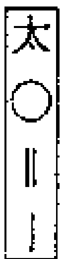
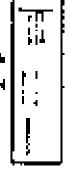
术曰：“立天元一为小平，减云数余为小长，以小平乘之为小积……平方开之得小平二分五 。再立天元一为大长，以乘小平为大平，以大长乘之为大积式，与元积相消得开方式，平方开之得大长，以小平乘之得大平。”

根据术文：1) 设$x=\frac{b}{a}$，小长即为$4.25-x$，因：小长×小平=1，那么$x(4.25-x)=1$，得$x^2-4.25x+1=0$，$x=0.25$。2) 设大长为$a$，$a\times a\times x=1024$，$0.25a^2=1024$，$a=64$，$b=16$。

朱世杰的方法是：首先假设一个中间变量，并求其值；其次假设一个所求变量，根据中间变量来求解，这可称为“二次立天元法”。在朱世杰的《四元玉鉴》中出现了“二元术”，那么，“二元术”与“二次立天元法”之间有何区别？又有何联系？

首先分析《四元玉鉴》卷首的“两仪化元”问题。原题如下：

“今有股幂减弦较较，与股乘勾等，只云勾幂加弦较和与勾乘弦同，问股几何?”

草曰：“立天元一为股，地元一为勾弦和，天地配合求之得今式，求到云式，互隐通分消之，内二行得式，外二行得，两位相消得开方式，平方开之得股。”

i. 从表现形式上看，二元术给出不同于天元求的筹式和解法规则；天元术筹式较二元术筹式简单，其解法灵活多变。

ii. 从本质上看，二元术和二次立天元都是设立两个未知数。二次立天元中的一个天元是

做为中间变量来起作用，而并非所求；二元术中“两仪化元”题的地元也不是所求，而是配合天元以求解，正如草曰：“天地配合求之”。

iii. 从解决的对象看，二次立天元解决的问题趋于简单能够很快求解；二元术解决的问题趋于复杂，需要采用一些技巧，如“互隐通分相消”。

因此，就其本质来说，二元术和二次立天元法是一致的，其区别关键在于二元术的表现形式与解法具有一般性，且规则化。从天元术到二元术，二次立天元法起了中间桥梁的作用，朱世杰使用天元术更加灵活、多变，同时在解题过程中自然会面临许多用多次立天元法也无法解决的问题，这就促使朱世杰去探讨更完善的解题方法。从二次立天元法到二元术，经历了量变到质变的过程。

不仅如此，《算学启蒙》中还出现了多次立天元的方法，并且这种方法在《四元玉鉴》中也广泛被使用。尤其是在《四元玉鉴》细草的“如意混合”、“方程正负”等问题中，大都是采用多次立天元的方法求解多元高次方程组。在“如意混合”第二问中出现连续九次立天元的解法，以求解九个未知数。对于此类问题，四元术无能为力，而多次立天元法却发挥了它的作用。可以推测采用多次立天元法，未知数的个数可以不受限制。例如，“方程正负”第一问：

“今有丝二百七十三两，织锦七匹，织绫一匹；又丝二百四十七两，织绫八匹，织绸一匹；又丝二百四十二两，织绸九匹，织锦一匹。其锦匹长自乘内减绫匹长，余又自乘内加绸匹长，共得三十五万八千八百二十九尺，绫匹长不及绸匹长二尺，欲多锦匹长一尺，问三色用丝及匹法各长几何？”

朱世杰的解法共分二步：①先求锦、绫、绸三色每匹用丝之数。如设三色每匹用丝之数分别为 $a$，$b$，$c$，依据已知条件表示为

$$\begin{cases} 7a + b = 273 \\ 8b + c = 247 \\ a + 9c = 242 \end{cases}$$

对于此方程组，朱世杰依然采用“方程正负术”，经过互乘相消得所求。②其次求出锦、绫、绸三色各匹长数。如设三色各匹长数分别为 $x$，$y$，$z$，根据已知条件有：

$$\begin{cases} (x^2 - y)^2 + z = 358829 \\ y + 2 = z \\ y - 1 = x \end{cases}$$

在求解此方程组时，朱世杰依然沿用《算学启蒙》中所使用的方法，即多次立天元法。具体方法如下：

立天元一为锦匹长，即设 $x$，那么绫匹长 $y=x+1$，绸匹长 $z=x+3$，代入下式：

$$(x^2 - y)^2 - z = 358829$$

得

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x = 358829$$

开三乘方得 $x$。

又立天元一为绫匹长，即设 $y$，锦匹长 $x=y-1$，绸匹长 $z=y+2$，代入同样的式子中可得：

$$y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 5y = 358826$$

开三乘方得 $y$。

又立天元一为绸匹长，即设 $z$，锦匹长 $x=z-3$，绫匹长 $y=z-2$，代入同样的式子中可得：

$$z^4-9z^3+71z^2-153z=358708$$

开三乘方得 $z$。

从四元术的特点来看，是同时设立不同的未知数，与之相比，多次立天元是分别设立不同的未知数，从形式上看，都是设立多个未知数。在具体应用时，多次立天元所解决的问题大都是比较简单的多元高次方程组。而四元术所要解决的是复杂的多元高次方程组，并且形成一整套的运算方法。由此可见，多次立天元法为四元术的产生奠定了可靠的基础，而且，在解决高次方程组问题时，使用的是多次立天元法或四元术，而不仅仅是四元术。

由以上叙述可得如下结论：

①多次立天元法是多次设立不同的未知数。

②多次立天元法主要解决的是简单的多元高次方程组，方程组中的方程不含有多个未知数的混合积项。

2. 求解多元高次方程组。

在《算学启蒙》中，有许多问题都是采用多次立天元法，用这种方法有时显得很罗嗦，尤其是未知数很多时，但是，使用此种方法也自有其优越的一面。

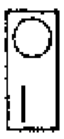
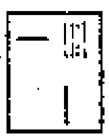
早在《九章算术》中就载有多元一次联立方程组的解法，随着“天元术”、“四元术”的出现，产生了多元高次方程组的解法。尤其是朱世杰的“四元术”，成为宋元数学发展的标志之一。朱世杰的四元术给出了求解多元高次方程组的一般方法。其实，《算学启蒙》中已经出现了使用天元术求解多元高次方程组的问题。例如，卷下“开方释锁门”第三十二问：

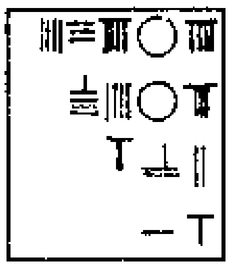
“今有立方立圆平方各一，共积一百二十七万七千七百二十四尺，只云立圆径不及立方面十四尺，却多平方面二十八尺，问三事各几何？”

如设立方边长为 $a$，平方边长为 $b$，立圆径为 $R$，用现代形式表示已知条件：

$$\begin{cases} R+14=a \\ R-28=b \\ a^3+b^2+\dfrac{9}{16}R^3=1277724 \end{cases}$$

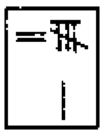
以下根据术文分析朱世杰的求解方法。左边为术文，右边为译文。

| 术文 | 译文 |
| --- | --- |
| 术曰：①立天元一为立圆径。 | 设立圆径为 $R$ |
| ②加十四尺为立方面。 | 立方面 $a=R+14$ |

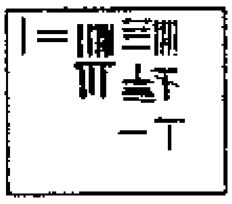
③再自乘又以十六乘之得为十六段立方积，寄左。

$16a^3=16\ (R+14)^3$

$16R^3+672R^2+9408R+43909$

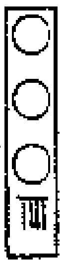
④又列立圆径减二十八尺为平方面也。

平方面 $b=R-28$

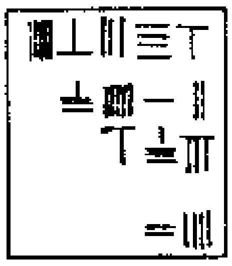
⑤自之又十六乘之内十六段平方积，寄左。

$16b^2=16\ (R-28)^2$

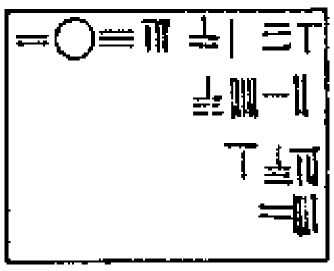
$16R^2-896R+12544$

⑥又列立圆径再自乘九之亦为十六段立圆积。

$16\times\frac{9}{16}R^3=9R^3$

⑦三位并之共为十六段积，再寄。

$8R^3+16R^2-896R+12544+16R^3$
$+672R^2+9408R+43909$
$=24R^3+688R^2+8512R+56448$

⑧列共积十六乘之与再寄相消得开方式，立方开之得立圆径。

$24R^3+688R^2+8512R+56448$
$=16\times1277724$
$24R^3+688R^2+8512R-20387136=0$
$R=84$

| | |
|---|---|
| ⑨加不足即立方面，减多即平方面也。 | $a=R+14=98$<br>$b=R+28=56$ |

由以上分析可知：①此方程组中有一方程含有未知数三次项，即 $a^3+b^3+\frac{9}{16}R^3=1277724$，其余两方程都是简单的未知数加减式；②在整个求解过程中，其运算程序完全与现代求解方程组的程序一致；③运算中采用的是“代入法”。对于此种方程组，朱世杰仅设一个天元，其它两个未知数均可通过天元加减某数来得到。

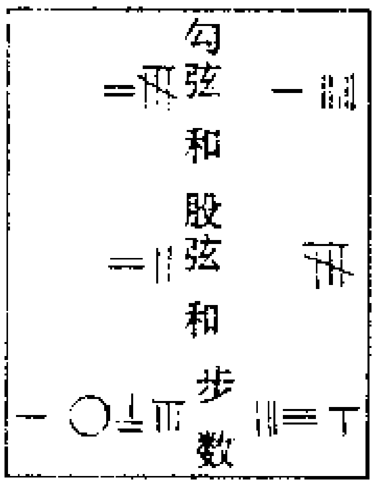
此类问题在李冶的《益古演段》中也有许多，他主要是通过一些几何方法将多元问题化为一元问题，如通过出入相补、化圆为方、线段和差等方法寻找等量关系。因此，李冶的化多元问题为一元问题还不是解方程组。在《算学启蒙》“开方释锁门”中，题目的已知条件给出明显的未知量关系，在“方程正负门”中已出现用天元术解方程组的先例。例如“方程正负门”第九问：

“今有直田勾弦和取七分之四，股弦和取七分之六，二数相减余二十二步；又股弦和取三分之一不及勾弦和八分之五一十四步，问勾股弦各几何？”

若设勾为 $x$，股为 $y$，弦为 $z$，用现代形式可表示为：

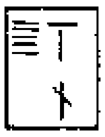
$$\begin{cases}\frac{6}{7}(y+z)-\frac{4}{7}(x+z)=22\\ \frac{5}{8}(x+z)-\frac{1}{3}(y+z)=14\end{cases}$$

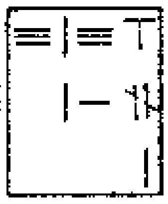
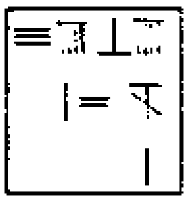
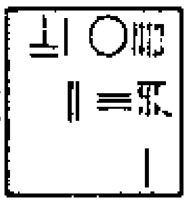
当然，这里还有一个显然条件，即 $x^2+y^2=z^2$。以下由术文来分析朱世杰的解法。左边为术文，右边为译文。

| 术文 | 译文 |
|---|---|
| 术曰：①以前分母四十九乘余数得一千七十八（乃是四十二个股弦和内减二十八个勾弦和余数）。 | $42(y+z)-28(x+z)=1078$ |
| ②又以后分母二十四乘不及步数得三百三十六（乃是八个股弦和减一十五个勾弦和余数也）。 | $15(x+z)-8(y+z)=336$ |
| ③如方程正负术入之，依图布算：<br>。 | $\begin{cases}-28(x+z)+42(y+z)=1078\\ 15(x+z)-8(y+z)=336\end{cases}$ |

④以右上遍乘左行，左中余四百六，左下二万五千五百七十八，上法下实而一得六十三步（乃股弦和）。

⑤八之加入右下得数以十五约之得五十六步（即勾弦和）。

⑥立天元一为弦，以减股弦和余为股，以减勾弦和余为勾。

⑦自之为勾幂，又列股自乘为股幂，并入勾幂与弦幂相消得开方式。

⑧平方开之得弦，减股弦和即股，减勾弦和即勾，合问。

$$\begin{cases}-420\ (x+z)\ +630\ (y+z)\ =16170\\ 15\ (x+z)\ -8\ (y+z)\ =336\end{cases}$$

异同同加，得式

$$406\ (y+z)\ =25578$$

$$y+z=63$$

$$15\ (x+z)\ =336+8\ (y+z)$$

$$15\ (x+z)\ =840$$

$$x+z=56$$

其实已得如下方程组：

$$\begin{cases}y+z=63\\ x+z=56\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$$

设弦为 $z$

股 $y=63-z$

勾 $x=56-z$

$$(56-z)^2=z^2-112z+3136$$

$$(63-z)^2=z^2-126z+3968$$

$$z^2=\ (56-z)^2+\ (63-z)^2$$

$$z^2-238z+7105=0$$

$z=35$

$x=21$

$y=28$

以上解法可归纳为以下几步：①$\begin{cases}-\frac{4}{7}(x+z)+\frac{6}{7}(y+z)=22\\ \frac{5}{8}(x+z)-\frac{1}{3}(y+z)=14\end{cases}$通分、遍乘直除，化简消元得$\begin{cases}y+z=63\\ x+z=56\end{cases}$。此过程与《九章》方程章一致，而不如秦九韶的互乘直除法。②用立天元的方法建立并求解方程组$\begin{cases}y+z=63\\ x+z=56\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$。

朱世杰采取以上的做法，主要是由于筹式所限。①分式方程组不能依图布算，因为分式无法用筹式表示，因此只有将分数化为整数才能依图布算。《九章算术》方程章中亦有此种情况。②高次方程也不能依图布算。因为筹式方程只表示联立一次线性方程组，对于一个既含有线性方程，又含有高次方程的方程组，过去的筹式布算已不适用。

由于上述原因，对于含有高次的方程组，朱世杰采用立天元的方法来求解。虽然用天元术求解高次方程组没有一定的表示规则，大都是以文字叙述为主，但整个运算程序与现代解法完全一致。值得提出的是：《算学启蒙》中涉及的多元高次方程组，形式较简单，仅含有一个高次方程，即便含有二个高次方程，如"开方释锁门"第二十一问有$\begin{cases}a^2-b=1268\\ b^2-a=748,\end{cases}$形式也不复杂，用天元术仍然能够求解。这为求解方程组开辟了一条新途径。

3. 最早的无理方程组。

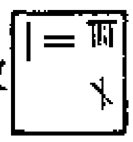
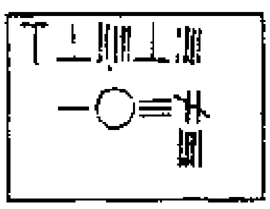
在《算学启蒙》"开方释锁门"中，有许多无理方程组，由于无理项系数无法依图布算，朱世杰采用多次立天元以及文字叙述的方法来求解。书中涉及的无理方程组形式都很简单。例如该门第二十三问曰：

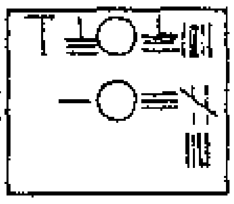
"今有直田长平相乘为实，平方开之得数加平长平和得一百二十九步，只云差三十九步，问长平各几何？"

若设长为 $a$，平为 $b$，即可表示为：

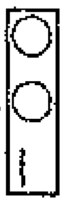
$$\begin{cases}\sqrt{ab}+(a+b)=129\\ a-b=39\end{cases}$$

以下由术文来分析朱世杰的解法。左边为术文，右边为译文。

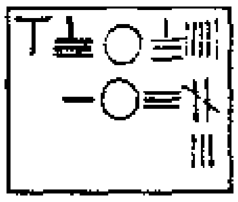
| 术文 | 译文 |
| --- | --- |
| 术曰：①立天元一为和。 | 设 $x=a+b$ |
| ②以减先云余为开方数。 | $129-x=\sqrt{a\cdot b}$ |
| ③自之就分四之为四段直积。 | $4(129-x)^2=4ab$<br>$4x^2-1032x+66564=4ab$ |

④又加差幂得式，寄左。

$$4x^2-1032x+66564+39^2$$
$$=4ab+(a-b)^2$$
$$4x^2-1032x+68085=(a+b)^2$$

⑤列和自之为和幂，与寄左相消得

$$4x^2-1032x+68085=x^2$$
$$3x^2-1032x+68085=0$$
$$x=89$$

开方数式。平方开之得和89步。

⑥减差半之得平，加差半之即长。

$$b=\frac{x-(a-b)}{2}=25$$
$$a=\frac{x+(a+b)}{2}=64$$

由以上分析知道，朱世杰解决无理方程组首先是立天元一为一中间变量，其次将无理方程化为有理方程，然后求解。这种解法与现代的求解方法是一致的。

朱世杰立天元一为何，一般依问题的方便而定，如在第三十问中：

“今有圆锥积三千七十二尺，只云高为实，立方开之得数不及下周六十一尺，问下周及高各几何?”

设高为 $h$，下周为 $c$，即可表示为：

$$\begin{cases}\sqrt[3]{h}+61=c\\ \dfrac{c^2}{36}\times h=3072\end{cases}$$

朱世杰给出的解法是“立天元一为开立方数”，即设 $x=\sqrt[3]{h}$，由此，他得出如下方程：

$$x^5+122x^4+3721x^3-110592=0$$

诸如以上所举，书中还有很多。

《算学启蒙》中涉及无理方程组的问题，其解法及所得的解都是正确的。但是，这里存在一个问题：在化无理方程为有理方程时，由于方程次数的增加，很可能导致增根。对于此问题朱世杰没有给出明确的方法，只能从他的求解过程做一分析。

首先，书中题目所得结果完全符合所求，即是无理方程组的解；其次，在将无理方程化为有理方程过程中，很可能出现增根。如以上所举的第二十三问，得到方程 $3x^2-1032x+68085=0$，其根有二，分别为 $x_1=89$，$x_2=255$。$x_1$ 符合已知条件，$x_2$ 不符合已知条件，对于此类情况，朱世杰均给出正确的解。由于中国古代的高次方程解法只能求得一个正根。因此，朱世杰将无理方程化为有理方程进行求解时，不可能考虑增根，他只议一个与实际相符的根就算达到目的。

# 参 考 文 献

[1]（元）朱世杰：《算学启蒙》，光绪三十年（1904）刻本。
[2]（清）王鉴：《算学启蒙述义》，光绪十年（1884）刻本。
[3]（清）徐风诰：《算学启蒙通释》，光绪十三年（1887）刻本。
[4]（元）朱世杰，（清）罗士琳补草：《四元玉鉴细草》，万有文库本。
[5]（元）李冶：《测圆海镜细草》，商务印书馆，1935。
[6]（元）李冶：《益古演段》，商务印书馆，1935。
[7]（清）罗士琳：《续畴人传》卷四十七"朱世杰"条。
[8] 杜石然："朱世杰研究"，载《宋元数学史论文集》。1966，科学出版社，第166—209页。

# 对明代数学思想的几点分析

## —明代数学研究之一①

金　福

（沈阳师范学院数学系）

本文由诸多事实材料出发，论证了明代数学家或懂数学的儒士、历算人员对数学起源与数学知识来源的认识，阴阳、象数神秘主义和程朱理学对数学发展的影响，实用性与社会性在明代算书中的明显表现。

## 一　对数学起源的认识

数学是怎样起源的，这是历代天算家不可回避的问题。明中后期数学家程大位（1533—1660年）在其《算法统宗》首篇“总说”中提出“数何肇，其肇自‘图书’乎？伏羲得之以画卦，大禹得之以序畴，列圣得这以开物成务。”“图书”就是河图、洛书，它们有如此重要作用，那么数学又源于什么？程氏说：“故今推明指直算法，辄揭‘河图’，‘洛书’于首，见数有本原云。”[1]程氏认为数学源于“河图”、“洛书”，他在《统宗》“首篇”插有“龙马负图”一幅，用以说明“河图”之来源，同时用文字注释形式对“河图”，“洛书”进行了详细解释，并与相生相克联系在一起。

中算史前辈对河图、洛书早有研究[2,3]，而数学源于河图、洛书的观点始自秦九韶[4]。至明，宋代理学思想风靡一时，随着程朱理学地位的提高，数学源于河图、洛书之说非常盛行，程大位是明代数学家中持这种观点的典型代表。比程氏稍前的唐顺之（1507—1560年）也说：“卦未画、书契未作而造物者已出，此二图示人，盖天机之如泄而数之所由肇也。”更为甚者，唐代还将河图、洛书与“天地之数”和“大衍之数”联系在一起加以诠释，认为河图、洛书是“圣人则之而画卦”“图书皆以五居中而一居下者，此尤造化之精意。”[5]追根溯原，宋儒刘牧《易数钩隐图》将天地之数解释为“洛书”，将九宫数解释为“河图”。宋阮逸假托后魏关郎伪撰《易传》，又将二者颠倒，朱熹《周易本义》则沿袭此说，并标“河图”，“洛书”于卷首[2]。而作这种解释的根据则出自《周易·系辞传》里的“河出图，洛出书，圣人则之”。

数学源于“河图”、“洛书”说是宋明理学思想在数学中的反映，是“格物穷理”之学的缩影。这种思想对当时甚至以后的数学家都有极其深刻的影响。这种思想有唯心成份，是带有神秘主义色彩的象数学所讨论的内容。象数神秘主义不是科学，是由于蒙昧时代的狭隘而愚昧的观点造成的[6]。然而历史上的迷信又与科学相伴，成了科学的温床。象数学又纯粹是神秘主义思想、理学的思想本质对包括数学在内的自然科学的研究，其中也有合理的成份。“河

① 本文是笔者在内蒙古师范大学的硕士论文“明代传统数学之研究”的一部分，这次发表稍作修改。

图"，"洛书"的出现是我国纵横图研究的开始，同时也蕴育了我国组合数学的原始思想萌芽。

还有一些算书将数学起源归于"黄帝作九章"，"伏羲画卦"或"隶首作数"之远古传说，是我国最早的数学起源说。元末的丁巨承袭"隶首作算术"，"周礼大司徒始列九数"的说法[7]，明初严恭则说："上古结绳而治，合有于数？伏羲画八卦，造书契而数始形，至轩辕代九章之数出，而乘除加减之法，于是乎备。"[8] "轩辕氏"就是传说中的黄帝，隶首是黄帝的臣子。"隶首作算"实际上是一种假托，这种假托明以前的数学家也多有引用，如汉徐岳《数术记遗》称："隶首注术，乃有多种"[9]，而刘徽对此曾提出疑问"记称隶首作数，其详未之闻也。"[10] 这种观点源自不知撰者的《世本》一书[11]，后人互相抄录。

黄龙吟《算法指南序》说："自轩辕氏命隶首作算而其法肇，既周公九章之作而其法详，其来尚矣。"[12]明刻本《算法指南》还有一幅"周公作九章之法，以数天下"图。[13]明天文学家周相在《大统历法》中说："自伏羲仰观天象而阴阳著，黄帝迎日推策而历算明"。[14]类似这种说法在明人天算学著作中俯拾皆是。这些人对数学起源问题的认识，有的模糊不清，难以回答，有的沿袭旧说，人云亦云。或是将其归于古人、圣人，黄帝、隶首、伏羲、周公、大禹也就都成了算家所神化的有关数学起源人物之化身。

为《同文算指》作序的杨廷筠则对这种说法持辩证态度予以评说："自龟马呈祥、图书阐秘，圣人则而象之。而容成隶首，推演其法，数学于是焉肇世。所传上、中、下三等法，即未必尽出黄帝。要之自然相生，开天立教非圣人不能作也。"[15]他承认这种数学起源说，但在此基础上指出所有数学内容未必都出自黄帝等圣人之手，也未必只有圣人才能作，数学是可以认识的。徐光启（1562—1633）则对这种数学起源的传说提出辩疑："周髀勾股者，世传黄帝所作。而经言庖羲，疑莫能明也"，[16]这种怀疑态度对进一步认清数学起源问题是有益的。

数学知识的来源。数学知识来源于客观物质世界。对此，周述学提出了"名数御量"说，对数学知识起源，数学与实践的关系有精辟阐述。他说："夫物之不齐，物之情也。故其形体有长有短，有广有狭，有多有寡，有轻有重，是以立法、名数以御之。度之以弓尺，而长、短、广、狭明；量之以斗斛，而多寡审；权之以斤秤，而轻重晰。此度、量、衡三法为数之纲也"。[17]即数学源于度、量、衡三个方面的实际需要，而度、量、衡三法是人类社会存在的三种基本数量关系。在周氏看来，物质有数量关系的基本属性，由于人们的实际需要才"立法名数御之"，于是产生了数学，这种观点是唯物的，而且在当时数学家中的认识程度也是比较高的。朱载堉（1536—1610）说："夫物莫不有制，制莫不有则。规、矩、准、绳、度、量、权、衡，皆物之定则也。盖规以取其圆，矩以成其方，准以揆其平，绳以就其正，度以度其长短，量以测其多寡，权以审其轻重，衡以定其低昂。合是数者，然后谓之有制。"[18]他的观点与周述学"名物御量"说相当。认为事物都有其客观规律可循，这种规律可归为数学中的规、矩、准、绳、度、量、权、衡等定则。

宝朝珍则认为数学"上自天文、下及地理，中于人事之得失，于万物之幽深玄远、出入潜没，莫不有数存焉。"[19]他的认识又深了一步，认为天文、地理、人事，及万事万物之中均存在着数学规律。程大位有上述观点，同时也有与宝朝珍类似的观点。他说："凡天宫、地员、律历、兵赋以及纤悉秒忽，莫不有数"[1]，即天文历法、地理、军事、赋税和度、量等事物中都存在着数学，是数学知识的来源。

王焕如说："八音者，圣人致中和之器也。其制之长短、广狭、小大、轻重皆有数。三三

迭运，九九相乘，天地万物之所生也，太和元气之所钟也，声律家谓之元声。黄钟者，天地阴阳之和也。"[20]这种观点更具体到了乐律学这一领域，黄钟乐律之中存在着数学或数学规律。程大位在度、量、衡方面也用黄钟之说进行解释．在其《纯宗》卷末有"黄钟万事根本图"，卷首有"黄钟生度：黄钟之管其长积矩黍，中者九十粒，一粒为一分，十分为寸，十寸为尺，十尺为丈，十丈为引。黄钟生量：黄钟之管其长容矩黍，中者一千二百粒为一勺，十勺为合，十合为升，十升为斗，十斗为斛。黄钟生衡：黄钟所容千二百黍为勺，重十二铢，两勺则二十四铢为两，十六两为斤，三十斤为钧，四钧为石……"[1]，即数学存在于客观事物之中，而数据或数量关系要进行测量才能得到，测量又需有度、量、衡。度、量、衡三者需统一标准确定单位，这种标准就需黄钟律管确定，这种认识是极其具体而深刻的。

杨廷筠说："夫天地名物，无非此数律。度、量、衡、准、绳、规、矩，数所纪也。故曰：极其数遂定天下之象。然数有体、有用，恢之乎不可穷，约之于无。何有皆体也，参伍错综万变莫测，则其用也。"[15]他不仅把度、量、衡、规、矩、准、绳看成是数学的纲纪，更可贵之处在于认为数学规律变化无穷。李之藻（1565—1630）也说："古者教士三物而艺居一，六艺而数居一，数于艺犹土于五行无处不寓。耳目所接已然之迹，非数莫纪，闻见所不及。六合而外，千万世而前、而后必然之验，非数莫推已然、必然，总归乘除损益。神智莫增，谲诡莫掩，颛蒙莫可狂也"。[21]在他看来，数学存在于客观世界中，数学可以反映物质世界的客观规律，是不容置疑的真理，这种认识已有些类似于现在人们对数学知识来源的认识。

## 二　阴阳思想对明代数学之影响

阴阳思想是古人对宇宙间事物及其变化规律作出的哲学概括。数学同样逃脱不了阴阳思想的影响。

顾应祥（1483—1565）："天地之所以神变化而生万物者，阴阳而已。一阴一阳交互错综而变化无穷焉。圣人因其交互错综之不齐而置为数术以测之。于是乎天地之高深，日月之出入，鬼神之幽秘皆可得而知之矣。"[22]在顾氏看来，天地间万事万物的变化规律是由于阴阳对立、相互依存、消长变化而造成的，而数术是驾驭错综复杂、变化无穷的阴阳之根本。阴阳思想被引入数学，并赋予其神奇的威力。唐顺之则认为天地间事物的变化规律是由"气"造成。唐氏说："天地之间聚散分合而已。天气下降，地气上腾而天地合，天气上腾，地气下降而天地判。合则气发泄于其外，判则气凝结于其中，其分所以为合也。"[23]唐氏所说的"气"可以左右天地聚散分合，而这种气又分为"天气"和"地气"，自然指阴阳。后来的柯尚迁继承并发挥了这种观点，柯尚迁说"天地之始，一气而已。气之运动而自然者为理，有气而后有象，有象而后有数。故数亦理之形见者，数以齐乎？气不外乎阴阳一阖一辟之变而已。阖则为聚，辟则为散。"[24]先有"气"，后有天地间事物的变化"象"，尔后才有其变化规律"数"，而"气"表现为阴阳，柯氏一语道破唐顺之的谜底。这就把数与阴阳有机地联系起来。追根溯源，朱熹（1130—1200）说过："天地之间一气而已，分而为二，则为阴阳，而五行造化，万物始终，无不管于是焉。"（朱熹《易学启蒙》卷一）不言而喻，这种以"气"驭万物之说是宋明理学思想在数学中的反映。

庞嵩为《测圆算术》作序说："天地者，数之原也，奇偶列而数彰矣，参两倚而数衍矣；

方圆斜正纵横交错而数之变不可胜穷矣。”[25]他认为阴阳交错相交导致数学的产生。天地间事物的变化规律导致了数学规律的变化无穷，而数学是天地间事物变化规律的抽象。阴阳相互消长，变化无穷的观点又使人们产生数学中有相生相克的思想。丁巨说：“一十百千万，互为消长。由是而天高地厚，日月往来，律吕声音，阴阳幽显，因此测彼，精入鬼神”。[7]古人的数学思想受阴阳观念的左右，使他们把错综复杂，难以解释的数学规律赋之阴阳。邢云路说：“阴阳，自然奇偶之数，即河图数也。天地者，阴阳对峙之体，一至十者，阴阳流行之序。然独阴不生、独阳不成，故生于天者，成于地”。[26]自然数有奇偶之分，把阴阳与奇偶进行类比，就把阴阳概念赋予了数。阴阳变化乃成数学的根本。数学研究的目的就是为了体现阴阳变化的秩序。而阴阳相互生克、消长也正是数学变化规律的具体表现。“数之用聚散分合而已矣。聚小以为大谓之乘，散大以为小谓之除”。[25]这也正是顾应祥所说的“然数之为术，虽千变万化不同，而其要不过一开阖而已，开者除也，阖者乘也”。[22]数学中的乘、除运算也成了天地间阴阳二气聚散分合的数量表达与体现。这种由阴阳观念引伸出来的每物必有对立物的思想体现在宇宙中是有天必有地，体现在数学运算中则有乘必有除，有加必有减（即有正必有负），有多必有少，在数量上的变化可以与阴阳消长规律相吻合，数字运算中也存在着辩证统一的关系。

这种阴阳关系体现在几何中则为有方必有圆，这是因为“河图圆而洛书方，……圆为天而阳。下阴，上者在天则地道上行，故阳不亢阴也。方为地而阴隔阳正者，在地则不居成功。故阴不疑阳也。”[5]将阴阳与天地附会，将天地与方圆联系起来的思想在顾应祥《方圆论说》中表现得更为明显：“窃尝思之，天地这道阴阳而已。方圆，天地也。方象法地，静而有质，故可以象数求之。圆象法天，动而无形，故不可以象数求之。”顾氏的阴阳观点比前人更为明确，他认为动为阳，静为阴。方圆并不是整体都静或动，而是静中有动，动中有静。动静相互转化和消长。因此他说：“方体本静，而中斜者乃动而生阳者也；圆体本动，而中心之径乃静而根阴者也。天外阳而内阴，地外阴而内阳，阴阳交错而万物化生。”[27]顾氏的观点正是指阴阳是一对矛盾着的对立统一体。阳中有阴，阴中有阳。阴消阳长，阴长阳消，阳极则返阴的再现，宋理学家朱熹所画双鱼回互之太极图则足以形象地说明这个问题。顾氏接着说：“阴阳交错而万物化生，其机正合于畸零不齐之外，上智不能测，巧历不能尽者也。向使天地之道，俱可以限量求之，则化机有尽而不能生万物矣”。[27]宇宙间这种奇妙而复杂的变化规律是上等智人和精巧历法所不能穷尽的，因为宇宙变化是无止境的，反映宇宙间规律的数学也应是无穷尽的。程大位编辑《统宗》时，在书中全录顾氏《方圆论说》，程氏显然要受此影响，阴阳与方圆附合思想早在《周髀算经》及其注释者赵爽身上已见端倪。《周髀》有天圆地方之说，而赵爽又说：“圆方者，天地之形，阴阳之数”。[28]可见这种圆象天属阳，方象地属阴之思想古已有之，到了明代数学家仍重新引用。

阴阳思想对数学的一个极端的影响是，由于古人将自然数奇偶赋之以阴阳、相应的封建迷信思想随阴阳渗入数学。程大位《纂要》（卷四）“孕推男女”49（定数）＋孕月－年庚（孕年岁），用天一、地二、人三、四时、五行、六律、七星、八风这八个数相减，余奇数阳属男，偶是女属阴。黄龙吟《算法指南》下卷算孕生男女法 49（定数）＋（妇人孕月）－年庚（孕年令）＋19（定数）奇为男，偶为女。“算病死生诀”（病人年岁＋病月＋病日）×3/9＝3（病活）或 6（不死延迟）或 9（鬼来催）。徐心鲁《盘珠算法》照录《算法指南》中算

法．又加“若算得是男而生女，是女而生男，其子不寿”。[29]可谓解释“圆满”。这种思想源于《孙子算经》，只是到了明代数学著作中又有所体现。这种极端影响使数学误入歧途，阻碍数学发展。

一个时代的数学受何种哲学思想支配与它的时代背景有关。当某种哲学思潮与某一时期的时代背景有相近之处时，这种哲学思想对数学会产生明显影响。

## 三　象数神秘主义和理学对数学的影响

阴阳思想与数学简单附会，使数学具有神秘色彩。丁巨说“稽古河图五十有五。一、二、三、四五七、八、九、六、大衍之数五十”。[7]“河图”与“大衍之数”都是象数学的内容。《九章算法比类大全·项麟序》称：“天一、地二、天三、地四；天五、地六；天七、地八；天九、地十。此天地生成，万类大数之元会也。”[30]唐顺之也说：“至于天地之数五十有五而大衍之数五十既虚其五．其用四十有九，又虚其一，其五者中之五．其一者下之一也。此尤圣人代造化泄尽精意处也”。[5]这种思想显然源于《易经》，“天地之数”和“大衍之数”除了神秘意义外无任何实用价值。柯尚迁对此进一步解释为“故天地之数始于一，太极者一也；太极生阴阳，阴阳者二也；阴阳生四象，而三才成，三才者三也，四象者四也；四象分为五行，而五数立矣。天地之道定为五，为数之原。由是以天地相合，生成之德配为十，以立数之本。……故又曰天数五，地数五，五位相得而各有合，此自一至十之数，所由肇也。”[24]柯氏按古人思想对一至十，数学由来，相互生变进行了详细推补，总算将一至十之数从太极、阴阳、三才、四象、五行中找到“合理”解释，这种解释除数字神秘性外，又受理学的影响。

宋明理学在明代成为官方哲学，定为一尊。明太祖朱元璋和成祖朱棣都大加提倡，规定朱熹所注释《四书》、《五经》为儒生科举考试主要内容。并下谕旨编纂《五经大全》，《四书大全》，《性理大全》等理学著作。而朱熹注释的《易经》等书又把“大衍之数”，“天地之数”，“河图”，“洛书”等极力给予理学诠释。致使明代数学思想打上了理学的烙印。“理学”与阴阳又是不可分割的，“理”是最高的本体，万物的本源，可以抛开事物的形态及其变化规律而独立存在。数学又是阴阳交错变化之根本，人们自然要去寻找数学之本源。正如柯氏所说：“九为数之归，八为数之象。圣人以九九之法而立数之原，以八八之法而立卦之象。故易以道阴阳，故一而二之，二而四之，四而八，重八而六十四，易道立矣，数以理三才，故一而三之，三而九之，重九而八十一。运于归除则天之高、星辰之远、地之大、高深广狭皆不能逃乎数矣。亦与易道相须，不离者也，岂易言哉？”[24]朱载堉说：盖数术之理十者乃河图之全数，八者乃八卦之变数，圣人则之。故十升为斗，十斗为斛，以象河图之数也。八升为鬴，八斛为钟，以象八卦之数也。”[31]数术之理中将十，八分别与河图与八卦相附会，朱载堉所说的“理”指的就是象数之理。朱载堉在《进历书奏疏》中说：“臣笃好数学，弱冠之时，读《性理大全》，见宋儒邵雍《皇极世书》，朱熹《易学启蒙》，蔡元定《律吕新书》，《洪范皇极内篇》等而悦之，口不绝诵，手不停披，……”[23]受理学思想影响不是偶然的。我们看到，对数学持唯物观点的周述学也或多或少有理学思想的影响。他说“天地之数合一，而已分之，而有升降聚散焉。乘所以升其胜之聚，除所以降其数之散，是乘除升降之相代。”由此可见周述学考虑问题的方式与阴阳思想是吻合的。周氏认为“量始于一圭，权始于一黍。是一乃数之

始也。一、二、三、四、五为生数，六、七、八、九、十为成数。"[17]这是有受理学思想影响的痕迹。

在柯尚迁看来，"数始于太极，而终于级．穷天地悉万物矣，皆由自一至十之所始也。然一者数之始，亦由数之小者，积小而大。"柯氏认为"多而不可穷故谓之极焉"，而数"一"就是太极，太极生阴阳，阴阳生万物，所以数"一"是数之始，而且具有生万物的本领。"数以理三才，故一而三之，三而九之，重九而八十一，运于归除则天地之高、星辰之远、地之大、高深广远皆不能逃乎数矣。""三才"指天、地、人，古人认为这三元是宇宙的基本组成。老子说"道生一，一生二，二生三，三生万物。"（《老子·道德经》）"一"是太极，而道立于一。"九"是"三"的自乘，即"天数"的最后一位。又是位值制数字中的最后一个，再加一就进位了。所以古人把这种思想神秘化。认为有"一"到"九"的数足够了，一是最基本的数字单位生成元，其它数皆由此生。"十十为百，十百为千，十千为万，十万为亿，十亿为兆，十兆为京，十京为垓，十垓为秭，十秭为穰"[24]"穰穰穰而复穰"可至无穷．此为大数"极"。就小数而言，可用"故十厘为一分，十毫为一厘，十丝为一毫，十忽为一丝，忽蚕口所出之丝，忽而微，微而厘。至于沙、渺、漠、糊、逡、巡则不可用于数矣。"[24]数字相生被赋予了神秘色彩。丁巨也说："为数始于一，终于十。积于一、二，成于九九。大为十百、十千、十万、百万、千万、万万、亿、兆、京、穰、沟、涧、正、载、极。小则分、厘、毫、丝、忽、微、纤、沙、尘、埃、渺、漠、幽、虚、空、清、净、无为。一十百千万，互为消长。由是而天地之厚，日日往来，律吕声音、阴阳幽显。因此测彼，精入鬼神。"[7]理与数学不可分离，而数学是理的具体体现。

严恭说"天下之理一，散之则为万，殊有是理则有是数。数由理出，故亦原于一，推之而后有十百千万，以至于无穷者焉。"[8]这里的"理"即象数之理。王氏《数学举要·序》说："吾闻之物生而后有象，象而后有滋，莫非数也。岂必由其术者然后能通之哉？苟通之，虽谓之儒学可也，儒学之学则大矣。"[33]"古之人论数也，曰物生而后有象，象后有滋，滋而后有数。然则天地初形，人物既著，则算数之事生矣。（《读汉书·律历志》）吴敬说："有理而后有象，有象而后有影"[34]，"盖天地之中有理，斯有象也，有象斯有数也，有数斯有据也"[30]，数学与理同出一源，二者关系如同影像相左右。理是宇宙间永恒存在的，无时不在，无处不有。数学也具有这样的性质。

唐顺之说："易云'形而上者谓之道，形而下者谓之器'，圣人虽是为性命真机发此两语，其实百氏技术，理数诸家之学，精微紧要处，悉在此矣。"[35]此处的"道"就是理，但与事物的变化规律及其本原合为一体。明末清初数学家李长茂说："数理，数本者也。家传说者，先理后数。夫形上道也，形下器也。"[36]数理就是数学的根本。唐顺之说"理与数非二也，数者理之实致用处也。"数是理在具体事物中的体现与运用。唐氏认为"窃以六艺之学皆先王所以寓精神心术之妙，非特以资实用而已，传曰'其数可陈也，其义难知也，'既得其数，而昧于其义，则九九之技，小道泥于致远是曲艺，之所以艺成而下也。即其数而究其义，则参伍错综之用，可以成变化而行鬼神，是儒者之所游于艺也。游于艺则艺也者，即所谓德成而上也。顾先王六艺之教，既寝，而算书之传于世，往往出于曲艺之士之所为，是以其数存而其义隐矣。"唐顺之的"义"虽然含有理学成分，但更主要的是指隐藏在数字变化之背后的数学规律。他说"六艺之学，昔人以为数可陈，而义难知，在今日历家却是义可知而数难陈。盖得其数

而不通其义者有之矣。若谓得其理而不通其数则施之实用，既无下手处。而并其所谓义者，亦脱空影响非真陈也。”此“义”即历法之道理，唐顺之在不懂立天元一为何意时，又说：“其数虽存，而数之所以为数者亦隐矣，伏惟明公以当世耆儒，玩心神明之学，而出其绪于艺数间。明公之于数，盖古所谓进乎技而入于道，以神遇而不以器求者也”。又说李冶《测圆海镜》“窃以为此书形下之数太详，而形上之义或略。使观之者尚不免有数可陈而义难知”[35]并形象地比喻为“及示人以鸳鸯枕而不度与人以金针之疑。”唐氏所说的“形上之义”正是金元时期数学理论之精华“天元术”，是指其数学本身的规律而言。这时的理又变成了数学原理、法则了。朱载堉说：“夫术士知而未达其理，故失之浅。先儒明理而复善其数，故得之者深。数在六艺之中，乃学者常事耳。”其中的理含有理学的成分。但在后面又说：“数非律所禁也，天运无端，惟数可以测其机。天道至玄，因数可以见其妙，理由数显，数自理出，理、数相倚而不可相违，古之道也。”[37]这里的理也是理学的理。并提出了理与数的关系，理可以用数表示，而数是从理中归纳而得。理与数二者相互依赖，通过数的表达，即可以预测天机，也可以探讨天体运动的奥妙。朱氏对天文历法问题中“理”，“象”，“数”三者关系，则提出“夫有理而后有象，有象而后有数。理由象显，数自理出，理、数可相倚而不可相违。凡天地造化，莫能逃乎数”[38]天文现象是由一定的规律制约着的，人们可以对各种天象的观测中窥知这一规律性，而由观测所得的种种数据则是这种规律性的客观和定量的反映。三者间存在着不可相违而统一的关系

总之，明代数学明显受象数神秘主义和理学思想的影响。徐光启在为李之藻《同文算指》撰序时认为明天元术等高深数学理论废弃的原因是“名理之儒土苴天下之实事，”“妖妄之术谬言数有神理”，此说不无道理。从整体上看，象数神秘主义对明代数学发展是有害的，理（道）学对数学的影响是多方面的，值得进一步研究。

## 四　数学的社会性表现极其明显

数学的地位。数学在社会生活中起一种附属、辅助的作用。它作为社会生活工具，被列入儒家应习的六艺之一。王氏《数学举要》说：“数学不必本于儒，而儒者亦穷究其奥”。[33]儒者学习数学可兼习而不可专业的思想，使数学作为一种工具为社会服务。王文素极力提高算学地位“六艺科中算术尊，三才万物总经论”[31]吴敬也说“人生世不能学算，如空中日月无光，既学书不学其算，俾精神减其一半”。[34]程大位则沿袭吴敬思想，在《算法纂要·先贤格言》中用改调西江月的格式说：“世间六艺任纷纷，算乃人之根本。知书不知算法，如临暗室昏昏”。[40]算学家极力提高算学地位，使其在社会中占有一席重要地位，以此相应提高自己的地位。柯尚迁说数学对“天之高、星辰之远，地之大，高、深、广、狭皆不能逃乎数矣。”[24]唐顺之也说：“句股所谓矩也，古人执数寸之矩，而日月运行，朓朒迟速之变，山谿之高深广远，凡日力所及无不可知知者，盖不能逃乎数也。”[5]万物的变化规律可以用数学而得到。这种思想未免有使数学神秘化，夸大其作用之嫌。就实而论，在中国封建社会里数学家和数学研究一般是没有社会地位的，丁巨说：“士类以科举故，未暇笃实”，“独余幼贱，不伍时流，经籍之余事，法物度轨，则间尝用心”。对于自己从事数学研究产生悲观心理，且说“伊游于艺，玩物丧志”。[7]这种在数学家中首先由李冶提出的研习数学是“玩物丧志”的说法，在明代也见其影响。

顾应祥是政界人物，明嘉靖间巡抚云南，并迁邢部尚书，他从官方数学家的角度对数学在当时的社会地位作了客观的叙述。他说："今夫世之论数者，俱视为末艺，故高明者不屑为之，而执泥者遂以为占验之法。虽栾城公自序，亦以为九九贱伎，殊不知君子之学自性命道德之外皆艺也。与其徒费精神于占毕之间，又不若留情于此，不惟可以取乐，亦足以为养心之助焉。后之有同此好者以余言然否耶？"[22]顾应祥认为数学研究可以象老人种植花草有"养心之助"的作用，可见数学或从事数学研究的人在当时的社会地位是低下的。

实用思想。只有数学与天文、历法、乐律等学科结合时，才显示出其社会作用。数学家的地位也随着数学与政治有关的天文历法等关系而提高。朱载堉就是明代数学家中将数学与乐律学相结合的典范。他的整个乐律学著作充分表现出他对数学的运用。注重数学，以数学总结乐律学的思想贯穿于朱氏的整个著作中。朱氏在《算学新说》中开宗明义，指出："臣所撰新说凡四种，一曰律学，二曰乐学，三曰算学，四曰韵学，前二者其书之本原，后二者其书之支派。所以羽翼其书也。"[41]朱氏把数学看成是认识其它学科的一种工具。他为解决摆在面前的艺术科学重大难题，亲自去造自然科学扶助阶梯。而这个阶梯高度又是当时自然科学顶峰之一。将数学作为自然科学工具的思想是实用的表现形式之一，它有助于提高整个自然科学水平，是认识其它有关学科的一把钥匙。

徐光启说："周髀句股者，……然二帝皆用造历，而禹复籍之，以平水土。盖度数之用，无所不通也。"[16]可见数学可用于历法、测量等问题上，这就决定了数学以追求实用为目的。项麟说："周礼大司徒以乡三物，教万民三日，六艺而数居一，盖艺者至理所寓日用资焉。"而数学的作用则"而数之为艺、大而一、十、百、千、万，小而厘、毫、丝、忽、秒。以至天之高也，星辰之远也，沧海之深，城郭宫室之大也，举不能逃。"[30]王文素也说数学"普天之下、公私之间不可一日而阙者也。"[39]程大位对数学实用性的认识更为明显，他认为："故圣人继天立极所以齐度量，而立民信者，不外黄钟九寸之管；所以定四时而成岁功者，不外周天三百六十五度之数。以至远而天地之高广，近而山川之浩衍，大而朝廷军国之需，小而民生日用之费，皆莫能外。数讵不重已哉？"可见数学有广泛用处，他列举出度、量、衡、天文、历法、测量；朝廷军国所需，以及民生日用等均离不开数学。数学之所以重要，是由于它在社会中有广泛的用处。程氏还认为"孙武子兵家言而感其通事理也。曰：'多算胜，少算不胜，'而况于无算乎？"[42]程氏援引兵家之言阐述数学有实用性的观点，军事行动与数学有直接的关系。军事数学家唐顺之也说："兵之用聚散分合而已矣。分不分谓之縻军，聚不聚谓之孤旅。然聚易而分难，其分所以为聚也。韩信多多益辩，兵家以为分数明也。数之用聚散分合而已矣。"[23]数学中的乘除思想以聚散分合的形式进入了军事运筹指挥中。

吴继绶在《算法纂要》序中充分发挥了书中的实用思想，写道："而今南倭，北虏充斥于边陲，若何而将将将兵，若何而行师转饷，折衝决胜，焉能无算；编户齐民，征徭逋负，当工役繁兴，司农辄为告匮，若何而取之缓之，不病国不病民，焉能无算；肉食者遍严廊，要以谋国，而见功堇堇何也，若何而旁招荐引，务在精白以承休，焉能无算。凡此皆今日之不容缓者，舍筹度，计算曷由哉？"[40]吴继绶针对当时"南倭、北虏充斥边陲"的社会背景，指出军事中的"将将将兵"、"行师转饷"，"折衝决胜"均离不开算学。司农辄对于编户齐民的赋税徭役，要达到"不病国不病民"的双重目的，在分轻重缓急之中均由数学作为运筹指导，以及封建官僚统治阶级为维护其统治所采取的一系列措施也离不开数学的帮助。程时用的

"刻直指算法纂要序"也说数学"自驵侩以逮天官，何人可废，即朦瞽弗释已，自舞象以及白首，何时可废，即食息弗释已，顾其中有要焉。"[10]即数学成了任何人，任何地方，任何时间都不可缺少的一门学问，数学的实用性被赋予了更广泛的意义。

从内容上看，明代数学著作的社会性表现极其明显，所涉及内容反了当时社会政治、经济、军事、文化等方面的实际情况和需要。程大位《统宗》与《纂要》的"各处盐场散堆量算引法"，夏源泽《指明算法》"盐场散堆量算引法"条充分反映了明代商屯中的"开中"法，程氏《统宗》中关于丈量土地的《亩法论》论文，批评了安徽休宁县万历九年丈量田地擅变亩法的情况。恰与张居正万历六年（1578）清丈全国各种类型土地，直至万历九年，土地丈量完的事实相合。吴继绶所说的"南倭北虏充斥于边陲"也正合明中叶嘉靖年间倭寇骚扰沿海、努尔哈赤（1559—1629）率军争战明土北疆之事实。

纵观明代数学著作，由始至终贯穿了数学着眼于实用的思想。尽管明以前传统数学著作也大都有实用内容，但也有较多的追求数学理论的高深著作。如宋元时期，能够代表当时数学发展主流的几部著作《测圆海镜》，《益古演段》，《四元玉鉴》，《数书九章》等不再是研究社会生活中简单的实用问题。李冶的天元术及其《测圆海镜》已基本与实际问题相脱离了。这种数学研究从自身理论出发，使其理论与社会实际脱节或由于生产力的关系在短期内看不出它有什么实际应用。这对数学本身的发展与完善完全是必要的。明代数学的这种成份已经不多了，如果把数学的发展看成纯数学理论的研究与数学知识的普及与应用两部分，那么明代数学是按后者的模式发展的。自杨辉数学普及性著作的出现，到元时朱世杰《算学启蒙》等著作，按照这种数学发展主线，明代数学的普及与实用思想明显加强。明以前的实用主要指数学理论的发展还未完全逃脱实用之痕迹与框架（即抽象化不够彻底）；虽说明代数学这种现象极其明显，但更主要的还是指将珠算、民间算法等直接投入实用，产生社会效益这一性质。朱载堉的《算学新说》和《嘉量算经》与乐律、度、量、衡等紧密的联系在一起，着眼于数学在乐律学中的运用，《算法大全》和《算学宝鉴》二书的内容浅显易懂，在计算技能和技巧上下工夫。唐顺之则着眼于数学在历法中的应用等等，不胜枚举。明代数学趋向实用的另一个明显例证是珠算书以及讲述算法的著作大量出现。明代近三百年间，前后出现了近百种讲述算法的书籍，足以证明这一点。

## 参考文献

〔1〕程大位：《算法统宗》，内蒙师大图书馆藏本。
〔2〕钱宝琮："宋元时期数学与道学的关系"，《钱宝琮科学史论文选集》，1983，科学出版社。
〔3〕李迪："程大位的数学思想"，《新珠潮》纪念程大位逝世380周年专号，1986年第4期。
〔4〕钱宝琮主编：《中国数学史》，1964，科学出版社，第270页。
〔5〕《荆川先生文集》卷十七"书河图洛书"条。
〔6〕罗见今："术数与传统数学"，《自然辩证法通讯》，1984年5期。
〔7〕丁巨：《丁巨算法序》。
〔8〕严恭：《通源算法序》，引自李俨：《十三、十四世纪的中国民间数学》（1957）。
〔9〕徐岳：《术数记遗》，钱宝琮校勘本。

〔10〕刘徽：《九章算术注释序》，见白尚恕《九章算术》注释，1983，科学出版社。
〔11〕《世本》曰："黄帝时，隶首作数"。
〔12〕汪一栋：《算法指南·汪一栋引》，见儿玉明人《明刊珠算书》，东京富士短期大学出版部刊。
〔13〕李俨：《中国算学史》1984，上海书店。
〔14〕阮元：《畴人传·周相传》。
〔15〕李之藻：《同文算指·杨廷筠序》。
〔16〕徐光启：《勾股义序》。
〔17〕周述学：《神道大编历宗算会》"明类论""总结论"条。
〔18〕朱载堉：《律学新说》卷四。
〔19〕王文素：《算学宝鉴·宝朝珍序》，北京图书馆藏抄本。
〔20〕龙文彬编：《明会要》（上）1957，中华书局。
〔21〕李之藻：《同文算指前编序》。
〔22〕顾应祥：《测圆海镜分类释术》十卷并自序，北京图书馆藏本。
〔23〕《荆川先生文集》卷十七"勾股等六论"条。
〔24〕柯尚迁：《数学通轨》及自序，见〔12〕。
〔25〕顾应祥：《测圆算术·庞嵩序》。
〔26〕邢云路：《古今律历考》。
〔27〕顾应祥：《方圆论说》，北京图书馆藏。
〔28〕〔汉〕赵君卿（爽）《周髀算经》卷上注文。
〔29〕徐心鲁：《盘珠算法》见〔12〕。
〔30〕吴敬：《九章算法比类大全·项麒序》，北京大学图书馆藏本。
〔31〕朱载堉："辩先儒周髓之非"，见《乐律全书》。
〔32〕朱载堉：《进历书奏疏》，《乐律全书》本。
〔33〕王氏《数学举要》，见四部丛刊初稿集部《皇明文衡》卷三十八。
〔34〕吴敬：《九章算法比类大全》及自序，北京大学图书馆藏。
〔35〕《荆川先生文集》卷七"与顾若溪"条，"与万思节主事"条。
〔36〕李长茂：《算海说详·序》。
〔37〕朱载堉：《律历融通》卷三。
〔38〕朱载堉：《律历融通》卷四。
〔39〕王文素：《算学宝鉴自序》。
〔40〕程大位著，李培业校释：《算法纂要校释》，1986，安徽高等教育出版社。
〔41〕朱载堉：《算学新说·序》。
〔42〕程大位："书直指算法统宗后"，见李俨：《中国数学大纲》（下），1959，科学出版社。

# 明末清初椭圆知识的传入及应用*

牛亚华
（内蒙古医学院学报编辑部）

明末清初，随着耶稣会传教士的来华，西方的天文、数学等科学知识传入我国。圆锥曲线知识也在这时首次被介绍到我国。在早期传入的圆锥曲线知识中，以椭圆知识为主，也只有椭圆知识得到了中国数学家的重视，应用较多。对于明末清初椭圆知识在我国的传播情况已有学者作过介绍，但仍不够全面和细致。本文试图在进一步挖掘和整理史料的基础上，对这一时期椭圆知识的传入和应用情况进行较全面的论述。

## 一 17世纪传入我国的椭圆知识

这一时期传入我国的椭圆知识主要保存在天文、机械、力学等著作中，如《崇祯历书》、《灵台仪象志》、《远西奇器图说》等书均有这方面的内容。

《崇祯历书》是一部卷帙浩繁的天文历算综合性著作，共一百三十七册。涉及到椭圆知识的主要有《测量全义》、《恒星历指》、《交食历指》、《测天约说》。

《测量全义》(1631)介绍的椭圆知识较多，包括椭圆的形成方法、椭圆面积公式、旋转体体积及部分体积公式。

关于椭圆的形成方法，该书讨论了二种。第一种为切割圆锥体的方法：如果用一平面去截一正圆锥体，由于平面与圆锥底面夹角的不同，可以得到五种截面，三角形，平圆形、圭窦形（抛物线）、陶丘形（双曲线）和椭圆形。而椭圆被定义为；圆锥与平面“无平行、任截之，截面为椭圆形”。显然这样定义椭圆不够严格（图1）。第二种方法是通过斜截圆柱体得到椭圆，卷三“界说”云：“椭圆，如圆柱而斜刻之，得两面焉”。卷五“测面”又云：“椭圆者，斜截圆柱所成两面形也。”（图2）

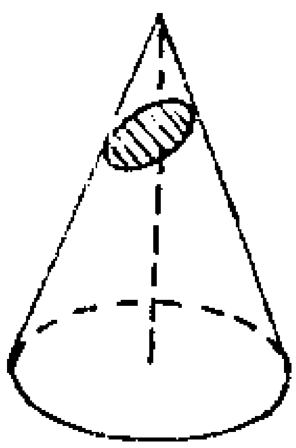


图1 《测量全义》截圆锥图

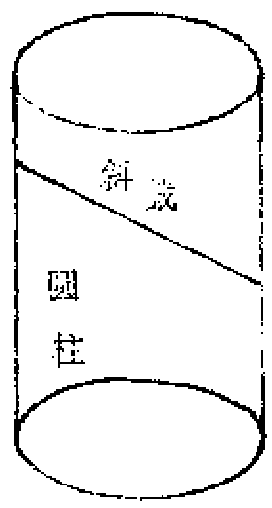



图2 《测量全义》斜截圆柱图

* 本文系作者在内蒙古师范大学硕士学位论文的一部分。

关于椭圆面积公式，《测量全义》是这样论述的：椭圆“形有长、短二径，古士默得本论曰：两径之中比例线为径作圆，与椭圆等。则两径为第一，第三率，相乘所得方数为第二率，又同线上之正方与圆容为一四与一一，今用两率相乘者，即中率正之数，故以两径相乘得数以一一乘之，以一四除之，得椭圆面积也”。[1]文中的“古士默得”即指古希腊的阿基米德，早在公元前二世纪，阿基米德就用双归谬法证明了椭圆面积等于以其两直径之积开平方为直径的圆的面积[2]，这圆被称为中率圆。这里并没有介绍阿基米德的方法，只列出了其结果。根据原文，如果设椭圆长轴＝a，短轴＝b，以二轴之中率$\sqrt{ab}$为直径作圆，那么，这圆的面积($S_{圆}$)与椭圆面积($S_{椭}$)相等。又圆的外切正方形面积($S_{方}$)为ab，而圆与外切正方形面积比为11/14，即：

$$\frac{S_{圆}}{S_{方}}=\frac{11}{14},\quad S_{圆}=\frac{11}{14}S_{方}\frac{11}{14}ab$$

所以 $S_{椭}=S_{圆}=\frac{11}{14}ab=\frac{22}{7}\cdot\frac{ab}{4}=\frac{\pi}{4}ab\quad(\pi=\frac{22}{7})\qquad(1)$

如果椭圆面绕长轴或短轴旋转即可形成长椭球体及扁椭球体，书中说：“椭圆亦有法之体也，又次圆球，其为体则长圆形之长径为轴旋转所生，如一点直行生一线，一线横行生面，一面上行生体，平圆以径为轴环行是生圆球，长圆面则有二径，一长一短，以长径为轴转轴环行，是生椭球之体，以短径为轴转轴环行，是生扁圆之体”。[3]而椭球体（长椭球体）又有下面的性质：“若椭圆体从小径端横截之，生两平圆面，若从其长径直截之，生两长圆面，若横截与小径平行，亦成平圆面，若斜截之，则其面皆不等，皆成长圆形”。[4]还强调了椭球体与鸟卵的区别：“凡鸟卵一端大，一端小，是为无法之体，椭圆体则两端等”。这些解释对于当时我国学者了解椭球体的几何性质是有帮助的。

《测量全义》还讨论了椭圆旋转体体积公式：“凡圆角体，其底之径为椭圆体之小径，其高半长径，则体之容为椭圆体四之一”。[5]

若椭圆旋转体之长轴a、短轴b均为已知，只要求出以短轴为底面直径、长半轴为高的圆锥体积，即可求得椭球体体积。书中给出的具体解法是：“如甲乙(AB)为长径，丙丁(CD)为小径，即丙戊丁甲(CDAE)半椭圆体，倍大于甲丙丁(ACD)角体。

“解曰：小径以二十二乘之，七而一，小径之周也，得数，以乘小径，四而一，小径之平圆面积也，得数以乘半长径，圆柱之容也，三而一，角体之容也，得数四之，椭圆（半）体之容也”（图3）。即：以短轴为底面直径，以长半轴为高的圆锥体积：

$$V_{锥}=\frac{22}{7}\cdot b\cdot b\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}\pi ab^2\quad(\pi=\frac{22}{7})$$

那么 $V_{椭}=4V_{锥}=4\cdot\frac{1}{24}\pi ab^2=\frac{1}{6}\pi ab^2$

此外，《测量全义》还给出了“求椭圆分体”的方法。即所谓计算旋转椭球体部分体积的方法。若用一平行短轴的平面于庚巳壬处截椭球体（图4），对于庚甲壬部分的体积($V_{冠}$)，书中给出的求法为：

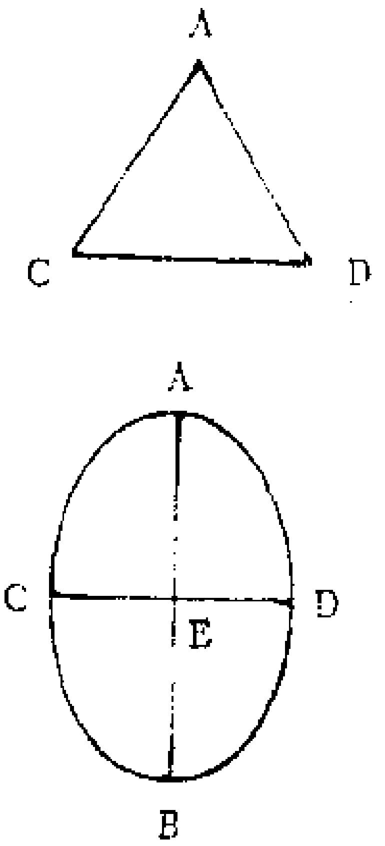


图3 《测量全义》所载示意图

“先求庚壬甲角体之容，次用三率法，巳乙（大分之轴线）与戊乙（半长径线）、甲巳（小分之轴线）并，若角体甲庚壬之容。”其中庚甲壬角体指以庚壬为底，甲为

顶的圆锥体，将上述方法表示为现代形式：

设　甲巳＝h，甲乙＝a，丙丁＝b，巳壬＝r

根据原文可推得：

$$V_{冠}=\frac{\pi}{3}h^2(a+h)\frac{b^2}{a^2} \qquad (3)$$

对庚巳壬乙“大分之容”，我们称之为椭球缺体积 $V_{缺}$，书中所给公式为（推导过程从略）：

$$V_{缺}=\pi a(2a-h)^2\frac{b^2}{a^2} \qquad (4)$$

显然(3)式与(4)式都是错误的。

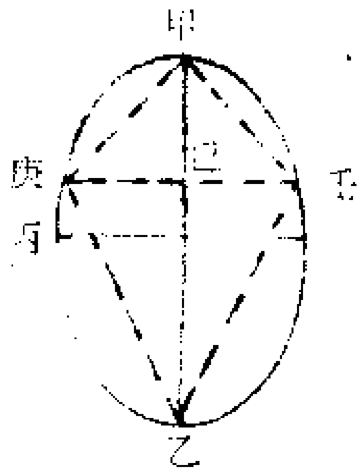



图 4

《恒星历指》(1631)也涉及到了椭圆问题*，指出椭圆有“二心”即椭圆有两焦点。

《交食历指》(1632)卷五“以长圆形求日食方位”节中，称椭圆为长圆形，还提到了椭圆的大辅圆和小辅圆，当时分别称为“外大圈”与“中小圈”，同时说明了大小辅圆的作法：“设乙丙为长圆形之大径，……平分于甲，以甲为心，丙为界作圆”这就得到了所谓的“外大圈”又“依先测之横径以甲为心作中小圈”（图 5），这“中小圈”即是小辅圆。

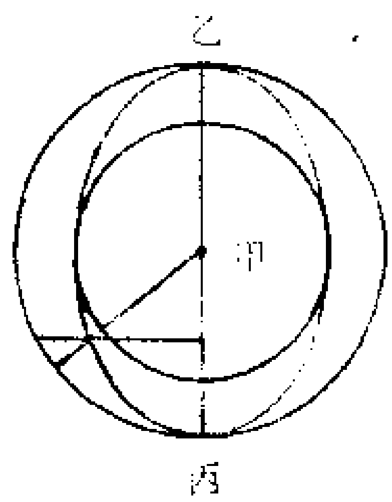
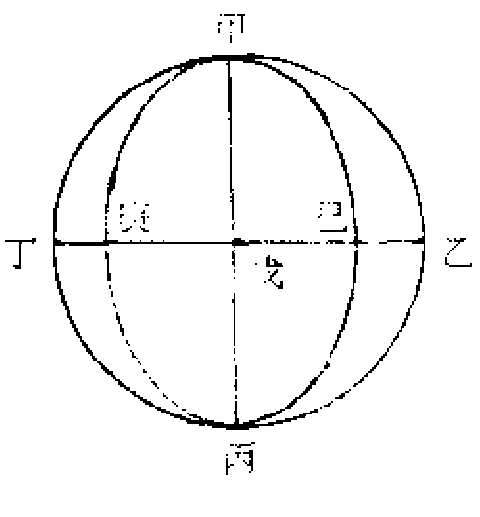



图 5　《交食历指》辅圆图

《测天约说》(1633)把椭圆称为“长圆形”、“瘦圈界”。并描述椭圆为：“长圆形者，一线作圈而首至尾之径大于腰间径，亦名瘦圈界，亦名椭圆”。[3]接着用图说明了椭圆与圆间的区别（图 6），“如甲乙丙丁圈形，甲丙与乙丁两径等，即成圈，今甲首至丙尾之径大于巳至庚之腰间径，是名长圆形”。至于椭圆的形成，则解释为：“如一长圆柱横断之，其所断处为两面皆圆形，若断处稍斜，其两面必稍长，愈斜愈长”。[7]椭圆形成于斜截柱这种思想对中国数学家的影响很大，清代许多数学家接受了这一观点，书中称椭圆面为“平长圆”，椭圆旋转体为“立长圆”

此外，《崇祯历书》中的《月离历指》、《日躔历指》等也提到了椭圆问题，但内容不多，此处就不加论述了。需要说明的是，在《崇祯历书》中，椭圆的译名虽不统一，如有长圆形、瘦圈界、椭圆*但总的来说以“椭圆”为主，并袭用至今。




《灵台仪象志》(1674)是比利时传教士南怀仁(Verbiest, Ferdinand, 1623—1688)为说明当时新制的几件天文仪器的结构，原理，安装及使用方法撰写的，全书共十六卷，后两卷全部为插图，共 117 幅，内容也是多方面的，其中与椭圆有关的 4 幅，分别为椭圆作法图及椭圆规结构图。

原书第 16、55、95 三图均示意了绘制椭圆的方法，图 7 是书中第 55 图，据图示可知甲、乙为两定点，将一确定长度的线段固定

图 6　《测天约说》所载椭圆图

* 李俨先生在“中算家的圆锥曲线说”一文（李俨：《中算史论丛》三，科学出版社，1955 年，第 519，页）中认为《恒星历指》附有椭圆投影图，笔者认为原文中的斜[illegible]是指说明对于投影平面的位置不是正投影关系，似非指椭圆。

于甲、乙两点，用一笔将线拉直到两点，使笔在线段上滑动，就可绘出一椭圆* 。这种拉线绘图方法所依据的正是椭圆定义：平面上一动点到这平面上两定点距离之和等于定长时，这点的轨迹就是椭圆。

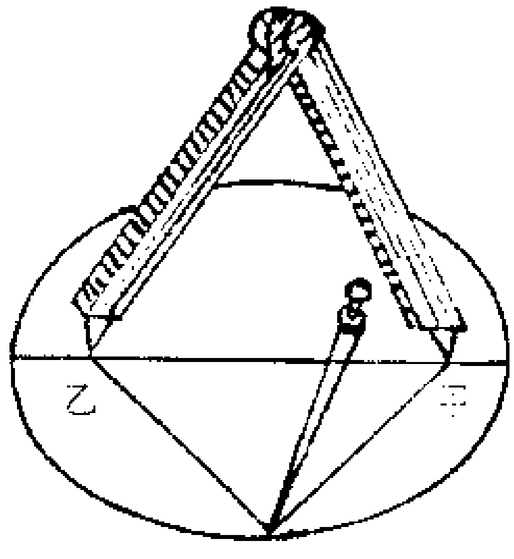
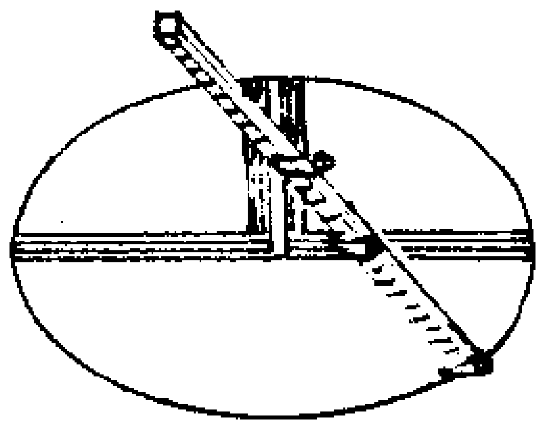
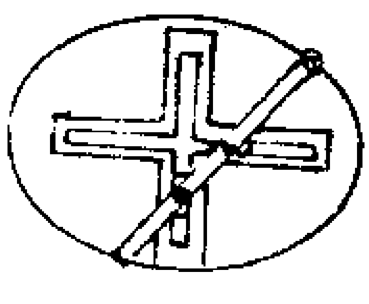


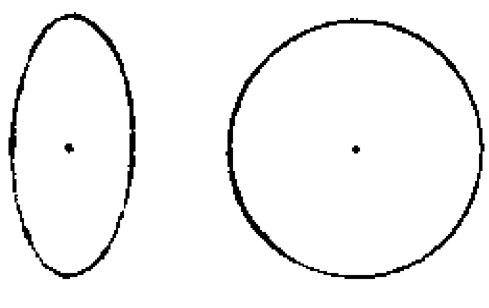
图 7 《灵台仪象志》椭圆作法图

《灵台仪象志》中还有利用绘图机械椭圆规绘图的方法。图 8 为原书中的椭圆规构造图。图中丁字形尺上刻有两条互相垂直的槽，在另一直尺上有两固定的钉如丁和戊，将丁、戊两钉分别置于纵横槽中，并在槽中滑动，直尺末端的尖笔描绘出一椭圆曲线。但由于这是一丁字形尺，丁点只能在横尺以上的部位运动，所以只能画出椭圆的一半，只要把丁字尺置于相反的位置即可画出另一半，这与现在一般使用的椭圆规原理完全一致：当一定长线段的两端分别在两条互垂直线上滑动时，则此线段上任意一点描绘出一个椭圆，其延长线上任意一点的轨迹也是椭圆。但现在椭圆规通常将丁字尺改为十字形尺，一次即可画出一完整的椭圆（图 9）[8]。椭圆规在机械零件的加工等实际生产中有很大用途。据现有资料看，《灵台仪象志》中的椭圆规是最早见于中文文献的、具有明确结构的椭圆绘图仪器，具有珍贵的史料价值。


图 8 《灵台仪象志》椭圆规构造图

至于椭圆规实物传入我国的时间，可能早于《灵台仪象志》约半个世纪，1627 年，邓玉函（Terrenz Jean，1576—1630）与王徵（1572—1644）合译《远西奇器图说》，在凡例“制器器”（制器用的器具）中有“作鸡蛋形规矩”。卷一第十八款又言：“平圆与鸡子圆形其重心，形心亦同所”。书中还有用“作鸡蛋形规矩”绘制的“鸡子形”及平圆形重心图（图 10）。从图可知“鸡子形”或“鸡蛋形”即指椭圆，那么“作鸡蛋形规矩”可能就是椭圆规。遗憾的是书中未描述其构造。


图 9 现代椭圆规结构图


图 10 《远西奇器图说》椭圆重心图

* 李俨先生对此有过介绍。（见李俨《中算史论丛》第三集，第 520 页）

尽管17世纪传入我国的椭圆知识不够系统和全面，但为中国数学增添了新的内容。这些知识在以后的天文、历法中得到了应用。

## 二 《数理精蕴》中的椭圆求积法

《数理精蕴》是清圣祖玄烨敕令编写的一部初等数学全书，1723年出版，共五十三卷，总结了明末清初传入我国的西方数学，也包括一些中国古代数学的优秀成果。[9]书中对椭圆，特别是椭圆求积方法进行了专门论述。在目前已有的数学史著述中，对于《数理精蕴》的椭圆内容尚未作全面介绍和专门研究。这里我们进行较深入的讨论。

1 椭圆面积求法。《数理精蕴》上编卷三“几何原本八”命题十二对椭圆面积公式作了推导，其方法利用了椭圆与大辅圆间的关系。由于大辅圆直径与椭圆长轴a相等，则有“凡圆面径与椭圆面径高度等者，其面积互相为比之比例，即同于函两形各作切方形互相为比之比例，而圆形面积与椭圆形面积互相为比之比例，又同于圆形径与椭圆形小径互相为比之比例也。”这是因为“平行线内两直角方面互相为比之比例，同于其底之互相为比也”。即正方形EFGH之面积$S_{EG}$与长形ABCD之面积$S_{AC}$之比为(图11)：

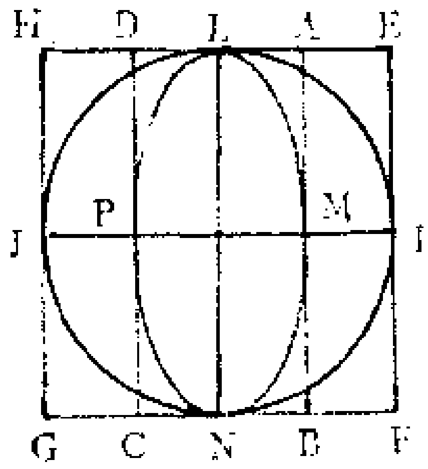



图11 《数理精蕴》中图

$$\frac{S_{EG}}{S_{AC}}=\frac{GF}{CB}=\frac{a}{b}$$

又因椭圆LMNP与圆LINJ也在平线内，那么：

$$\frac{S_{圆}}{S_{椭}}=\frac{S_{EG}}{S_{AC}}=\frac{GF}{CB}=\frac{a}{b} \qquad (5)$$

$$S_{椭}=\frac{b}{a}S_{圆}=\frac{\pi}{4}ab \qquad (6)$$

据有学者考证，这些内容出自《阿基米德著作集》“截锥面与椭球”IV.V两卷。[10]

2 旋转椭球体体积公式的推导及应用。《精蕴》上编卷三“几何原本十”命题十二对旋转椭球体体积公式的证明过程进行了详细论述。图12为原书示意图，据原文所述：ABCD为旋转椭球体，DB为短轴等于b，AC为长轴等于a，且等于AECF球体直径。用一平面于任意处如NM处截两球体，所截得两平面分别是以NM和PQ为直径的圆。以PQ为直径的小圆面积$S_{小}$和以NM为直径的大圆面积$S_{大}$之比为：

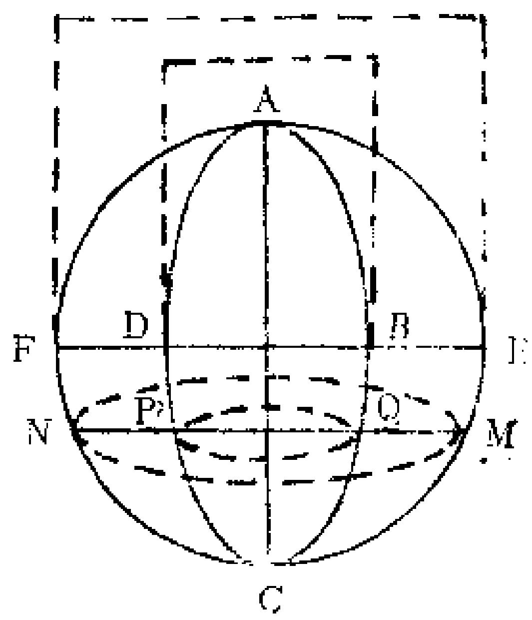



图12 《数理精蕴》载椭球体图

$$S_{小}:S_{大}=PQ^2:NM^2$$

而 $PQ:NM=BD:EF=b:a \qquad (7)$

所以 $S_{小}:S_{大}=b^2:a^2 \qquad (8)$

又“若将此两体与戊已(EF)径平行，任意分为几何面，其相当大小两面之比例，皆如戊已(EF)

方面与乙丁(BD)方面之比例,此所分各面之比例既皆同于乙丁(BD)与戊已(EF)所作方面之比例,则椭圆体与圆球体之比例,必同于乙丁所作方面与戊已所作方面之比例可知矣”。我们用一平行于短轴的平面于等高处任意截两球体,截得的平面面积之比处处均为 $b^2/a^2$,

即: $$S_{i椭} : S_{i圆} = b^2 : a^2. \tag{9}$$

那么: $$V_{椭} : V_{圆} = b^2 : a^2 \tag{10}$$

所以: $$V_{椭} = \frac{b^2}{1^2}V_{圆} = \frac{\pi}{6}a^2b \tag{11}$$

有学者对《数理精蕴》的底本问题进行了研究,并列出了所有出自阿基米德著作的内容,但上述内容未被包括。[11]这里解决问题的思想方法也与阿基米德不同,却具有中国传统数学的特点。

在处理体积问题时,中国传统数学的方法之一就是选取一个辅助形体,这辅助形体与所求立体之体积必需有一定的关系,若辅助形体的体积为已知或容易求得,那么所求立体体积就可获解决。中国古代算书中有不少这样的例子,最突出的是刘徽与祖氏父子解决球体积时所用的方法。刘徽先找到球的辅助形体“牟合方盖”及它们之间的关系为 $V_{球} : V_{牟} = \pi : 4$。祖氏父子循着刘徽的方向求出了“牟合方盖”的体积,球体积就迎刃而解了。《数理精蕴》在求旋转椭球体体积时也采用了这种方法,选取一直径等于椭圆长轴的球体为辅助形体。由于球体积为已知,而圆与椭圆又有特殊关系,所以巧妙地求出了旋转椭球体体积公式。这种方法在《数理精蕴》中应用很多,较之阿基米德的方法[12]更直观、简洁。

旋转椭球体体积公式的推导主要应用了两条定理。一是椭圆基本定理:椭圆与辅圆对应弦之比,等于椭圆长短轴之比。如(7)式就是利用了这一定理。二是刘祖原理,作者首先把两立体在等高处截面关系转化为截割处对应弦之关系,如(7)、(8)两式。解决了等高处截面面积关系问题,再应用一次刘祖原理就可得到两立体的体积关系,如(9)、(10)两式。椭圆基本定理是由西方传入的[13];刘祖原理是中国传统数学所固有的。因此这一公式的推导应是中国数学家在吸收西方数学知识的基础上,巧妙地结合传统数学思想方法所取得的成果。

截面比较原理同样也适用于椭球体部分体积(椭球冠)的求解,《数理精蕴》给出的求法为:“所分之寅丙卯(PCQ)椭圆体之一段,与子丙丑(NCM)圆球体之一段,其比例亦必同于乙丁(BD)所作方面与戊已(EF)所作方面之比例矣”(如图 12)即:

$$\frac{V_{椭冠}}{V_{球冠}} = \frac{b^2}{a^2}, \qquad V_{椭冠} = \frac{b^2}{a^2}V_{球冠} \tag{12}$$

而球冠体积在当时很容易求得。《测量全义》曾给出过两个错误的椭球体部分体积公式,《数理精蕴》并未因袭,而是用自己的方法推导出了正确的结果,此外《数理精蕴》还证明了椭球体与外切圆柱体的体积比为 2∶3;与外切长方体的体积比为 π∶6。即:

$$V_{椭} = \frac{2}{3}V_{外切圆柱} \tag{13}$$

$$V_{椭} = \frac{\pi}{6}V_{外切长方体} \tag{14}$$

3 椭圆台体体积的计算。《数理精蕴》把上下底面均为椭圆的台体称为“上下不等椭圆面体”。下编卷二十六有一题为:“设如上下不等椭圆面体,上大径四尺,小径三尺;下大径八尺,小径六尺,高十尺,问积几何?”对这一题书中给出三种解法。

如果我们设上底面长短轴分别为 $a_1=4$, $b_1=3$;下底面长轴 $a_1=8$,短轴 $b_2=6$,高 $h=10$。那

么有

解法 1:求出椭台体的平均底面积,再乘以高,就可得到体积。椭台体平均底面积可通过外切四棱台平均底面积获得:

$$\bar{S}_{长方}=(a_1b_1+a_2b_2+\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2})\times\frac{1}{3}$$

(《精蕴》"几何原本九"中已给出)

$$\bar{S}_{椭}=\frac{\pi}{4}S_{长方}=\frac{\pi}{4}(a_1b_1+a_2b_2+\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2})\times\frac{1}{3}$$

$$V_{椭台}=\bar{S}_{椭}\cdot h=\frac{\pi}{24}(2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+2a_2b_2)h \tag{15}$$

这一公式无疑是正确的。

解法 2:延长椭台体母线 AB、CD,使交于一点,则补成一椭圆锥 EBC(图 13)

令 EO=H

∵ΔABF∽ΔEBO　　∴EO : OB=AF : FB

即 $H:\frac{a^2}{2}=h:\frac{a_2-a_1}{2}$

$$H=\frac{a_2}{a_2-a_1}h$$

$$V_{椭台}=V_{ECB}-V_{EDA}$$

$$=\frac{H}{3}\cdot\frac{\pi}{4}a_2b_2-\frac{H-h}{3}\cdot\frac{\pi}{4}a_1b_1$$

$$=\frac{\pi}{12}[a_2b_2\frac{a_2}{a_2-a_1}h-a_1b_1(\frac{a_2}{a_2-a_1}h-h)]$$

$$=\frac{\pi}{12}(\frac{a_2^2b_2-a_1^2b_1}{a_2-a_1})h$$

利用 $a_1/b_1=a_2/b_2$ 即可转化为(15)式。

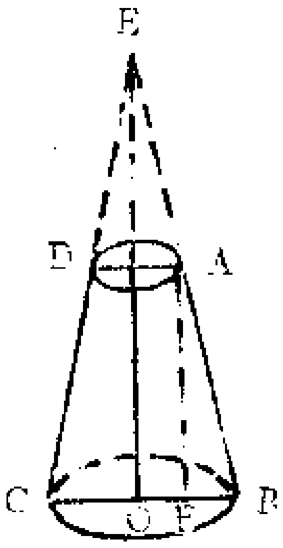



图 13　《数理精蕴》计算椭圆锥体积图

解法 3:椭台体与其外切长方台体(刍童)在等高处的截面比有一固定关系:"全长方面积与椭圆面积之比,同于方面积与圆面积之比,故上下不等长方体与上下不等椭圆面体之比,即同于长方体与长圆体之比也"。即(图 14):

$$\frac{S_{i椭}}{S_{i长方}}=\frac{S_{i圆}}{S_{i正方}}=\frac{\pi}{4}$$

所以:$\frac{V_{椭台}}{V_{外切长方台}}=\frac{\pi}{4}$

$$V_{椭台}=\frac{\pi}{4}V_{外切长方台}=\frac{\pi}{24}(2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+2a_2b_2)h$$

此处又一次用到了刘祖原理,根据椭台体与外切长方台在等高处截面成定比这一关系,轻而易举地解决了用微积分才可解决的问题。这种方法对于今天的数学工作者仍有启迪作用。

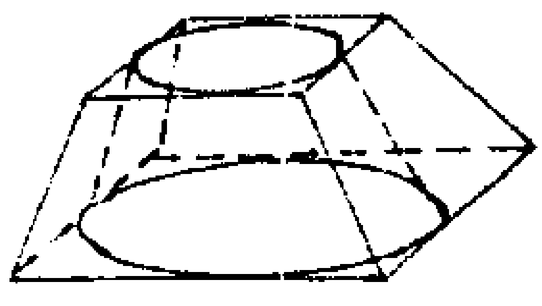


图 14

4　旋转椭球体表面积及相关问题。椭球体表面积公式在以前的数学著作中没有涉及,《数理精蕴》首次探讨了这一问题。书中介绍的表面积公式及推导过程大致如下:

设椭球体长轴为 a,短轴为 b,表面积为 $S_{椭球}$。圆球体直径为 a,表面积为 $S_{正球}$。若用一平行短轴的平面于等高处任截两球体(图 12)。则"可为无数平圆界,其相当各圆界之比例,皆同于

乙丁(BD)径与戊巳(EF)径之比例，则全体外面积之比例，岂不同于乙丁径与戊巳径之比例乎！”

若椭球体与圆球体在等高处截面周长分别为$L_{小}$，与$L_{大}$，那么根据上文意思有：

$$L_{大} : L_{小} = MN : PQ = EF : BD = a : b \tag{16}$$

$$S_{椭球} : S_{圆球} = L_{小} : L_{大} = b : a \tag{17}$$

所以：

$$S_{椭球} = \frac{b}{a} S_{圆球} = \pi ab \tag{18}$$

我们知道，椭圆旋转体表面积公式须用无穷级数或超越函数来表示，用初等函数无法表达。上述推导过程及结果均有误。原因是刘祖原理仅适用于平面面积，而作者将其推广到曲面面积上了(如17式)。此外，书中还得出几个有关椭球体表面积的结论，都不正确。尽管如此，这种开创精神值得称道。

《数理精蕴》中的椭圆求积内容一直未引起数学史家的注意。钱宝琮先生在评价清代的椭圆计算问题时说：“至于椭圆面积，则徐有壬、夏鸾翔均以 $A=\pi ab$，徐有壬《测圆密率》卷一，更求得椭圆蛋体(旋转椭圆体)、椭圆桶(柱)体，椭圆尖锥、椭圆台体诸体积，夏鸾翔更推衍前人诸术，至求圆锥曲线之弧长……各种面旋转体之表面积及体积。惟夏氏诸术均在积分术传入以后，材料虽甚丰富，不是奇也”。[14]实际上，徐有壬所得诸公式均来源于《数理精蕴》。

## 三 《历象考成后编》中的椭圆知识及应用

《历象考成后编》(以下简称《后编》)是清政府主持修编的一部天文历法著作，共十卷，1742年成书。主要介绍地心系的椭圆运动定律和面积定律。从物理本质上讲，这是一种颠倒了的刻卜勒行星运动定律，但这对数学计算却没有丝毫影响，由于刻卜勒定律的引入，必然要涉及到椭圆轨道运动的计算问题，因而也就要用到一些椭圆方面的知识。

1 《后编》用到的知识有以下几方面：

(1)介绍了椭圆中心、焦点、焦距、长短半轴及相互关系。《后编》称：

椭圆对称中心为：“心”或“本天心”。

焦点为：“地心”。

半焦距：“二心差”

焦距：“倍二心差”

如果我们设椭圆的长半轴为 a，焦距为 c 短半轴为 b，书中还介绍了下列关系式：

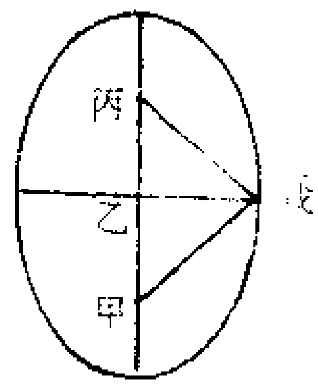


图 15 《后编》所载图形

椭圆上任意一点到两焦点距离之和等于其长轴。即 丙戊+甲戊=2a(图 15)。并由此推出长短半轴与焦距间的关系式：“以甲乙为勾，甲戊为弦求得乙戊股即椭圆小半径也”表示成现代式子即：$b^2=a^2-c^2$。

以上均属椭圆知识中最基本的概念，《后编》之前的天算书都没作过介绍。

(2)椭圆绘图法。

《后编》讨论了两种绘制椭圆的方法。一为拉线法，与《灵台仪象志》所述一样。二是椭圆切

线作图法。设椭圆长半轴为 a,焦距为 c,两焦点分别为 F、$F_1$,具体步骤是:以一焦点如 $F_1$ 为圆心,2a 为半径作圆弧,作任意半径如 $P_1F_1$,连接 $P_1F$,过中点 $P_2$ 作 $PP_2 \perp P_1F$,则 P 点即为椭圆上一点,如此重复作点,连成光滑曲线,即成椭圆[15]。$PP_2$ 为椭圆上过 P 点之切线。《后编》认为“以此发明椭圆之理,最为精巧”。(图 16)

(3)椭圆与辅圆的各种比例关系。

(i)椭圆与辅圆对应弦之关系:“平圆正弦与椭圆正弦之比例必同于平圆半径与椭圆小半径之比例”。即椭圆基本定理,以下关系衍于此。

(ii)椭圆与外辅圆的角度关系,如图 17,如果已知圆心角∠MOP=α,求∠MOQ。《后编》的方法是:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{MP}{OM}$$

而 $\mathrm{tg}\angle MOQ=\frac{MQ}{OM}\quad \frac{\mathrm{tg}\angle MOQ}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{MQ}{MP}=\frac{OB}{OA}=\frac{b}{a}$

所以 $\mathrm{tg}\angle MOQ=\frac{b}{a}\mathrm{tg}\alpha$

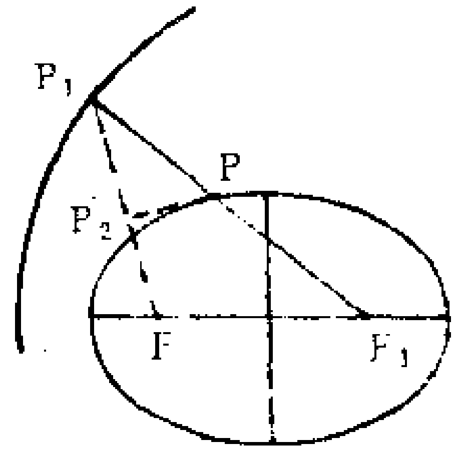



图 16

《后编》称∠POQ=∠POM−∠MOQ 为椭圆差角,这样可借助辅圆求出相应的椭圆中心角度。由于地球在椭圆的一个焦点如 F 上,太阳如果运行到 Q′的位置,同样可求出在辅圆上的相应位置。已知∠NFQ′=β,求∠NFP。

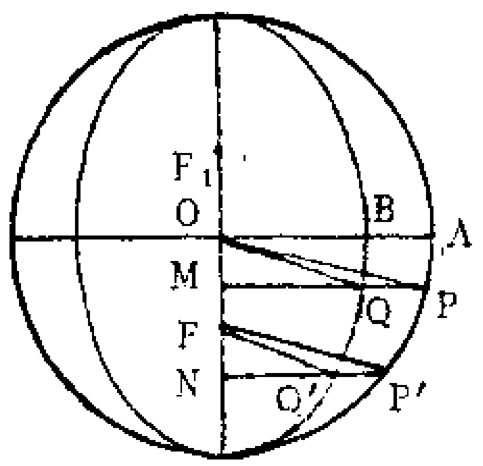



图 17

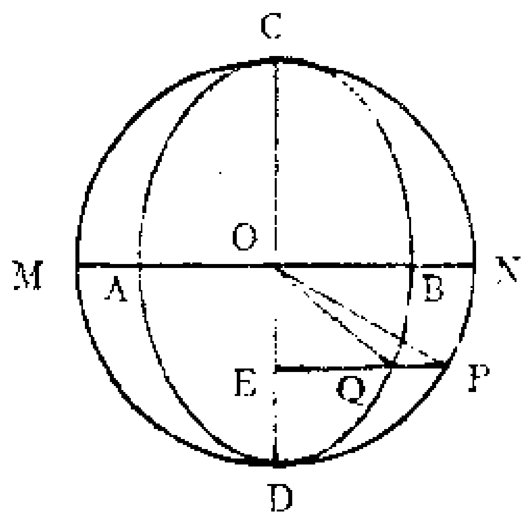



图 18

因为 $\mathrm{tg}\beta=\frac{NQ'}{FN}$,$\mathrm{tg}\angle NFP=\frac{NP'}{FN}$

所以 $\mathrm{tg}\angle NFP=\frac{a}{b}\mathrm{tg}\beta$

(iii)椭圆与辅圆的面积关系。对于椭圆与辅圆的全面积有:“凡平圆面积与椭圆面积之比例,同于椭圆大径与小径之比例”。这是因为“盖将平圆椭圆二面积依壬癸(MN)横径缕析之,则皆成线矣,其线与线之比,既皆同于大径与小径之比,则面与面之比,亦同于大径与小径之比”。这里用到了卡瓦列里原理。椭圆的弧扇形与圆的弧扇形面积也有这种关系。如图 18,对于一椭弧面积如 $S_{OQD}$ 及相应的圆弧面积 $S_{OPD}$ 有:

$$S_{OQD} : S_{OPD}=b : a$$

因为：　$S_{EQD}:S_{EPD}=b:a$　（卡瓦列里原理）

而　　$S_{\triangle OEP}=\frac{1}{2}OE\cdot EP$，　$S_{\triangle OEQ}=\frac{1}{2}OE\cdot EQ$

$S_{\triangle OEP}:S_{\triangle OEQ}=a:b$

所以：　$\frac{S_{EQD}+S_{\triangle OEQ}}{S_{EPD}+S_{\triangle OEP}}=\frac{b}{a}=\frac{S_{OQD}}{S_{OPD}}$

这里的推理与结果都是正确的。实事上，我们只需把椭圆看成一个以 a 为半径，$\pi a^2$ 为面积的圆的射影，并令两平面夹角的余弦等于 b/a，上述面积关系即可保证。同样椭圆介于两条半径的部分，其面积可视为圆扇形的射影。[16]

2　《后编》的椭圆轨道运动计算方法

既然《后编》使用了刻卜勒第二定律，就必然存在着数学解算问题，在假定太阳轨道的长半轴及偏心率为已知的情况下，《后编》关于太阳运动的计算包括两个方面[17]，一是从实际观测到的太阳离开轨道近地点的角距离（《后编》称实行）算出太阳轨道向径所扫过的椭圆面积，由此算出按平均运动计算的所谓平均近点角（《后编》称平行），所用方法称为"以角求积"；二是通过平均运动推求在给定时刻的太阳的观测位置。《后编》给出三种解法，分别称为"以积求角"、"借积求积"和"借角求角"。这里需要说明的是，在讨论上述问题时，对于所涉及到的天文学内容不予考查，仅从纯数学的角度研究它们的方法。

(1)以角求积

如图 19，ABCD 为椭圆，MCND 为辅圆，O 为中心，$F_1$、$F_2$ 为焦点，长半轴 OA＝a，$OF_1=c$，已知$\angle DF_1P=\alpha$（P 为椭圆上任意一点），求 $DF_1P$ 一段弧面积 $S_{\widehat{DF_1P}}$。

延长 $PF_1$ 至 E，作 $F_2E\perp EP$，而$\angle F_2F_1E=\angle PF_1D=\alpha$

所以：　$EF_1=2c\cos\alpha$，$F_2E=2c\sin\alpha$

又：　$F_1P+F_2P+EF_1=2a+2c\cos\alpha$　　(1)′

而　$F_2P^2=F_2E^2+EP^2$

$$F_2P-EP=\frac{F_2E^2}{F_2P+EP}=\frac{4c^2\sin^2\alpha}{2a+2c\cos\alpha}=\frac{2c^2\sin^2\alpha}{a+c\cos\alpha}\qquad(2)'$$

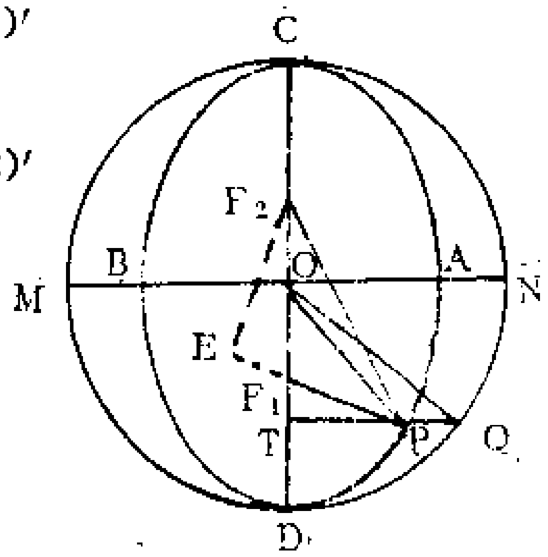



图 19

(1)′式加(2)′式：

$$2F_2P+(F_1P+EF_1)-EP$$

$$=2a+2c\cos\alpha+\frac{2c^2\sin^2\alpha}{a+c\cos\alpha}=2F_2P$$

$$F_2P=\frac{a^2+c^2+2ac\cos\alpha}{a+c\cos\alpha}$$

$$F_1P=2a-F_2P=\frac{a^2-c^2}{a+c\cos\alpha}=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$$

设$\angle DOQ=\gamma$，作 $TP\perp OD$ 并交辅圆于 Q，连结 OQ、OP。

因为：$TQ=OQ\sin\angle QOD=a\sin\gamma$

$$TP=F_1P\sin\alpha=\frac{b^2\sin\alpha}{a+c\cos\alpha}$$

而　$$\frac{TQ}{TP}=\frac{a\sin\gamma}{\frac{b^2\sin\alpha}{a+c\cos\alpha}}=\frac{a}{b}$$

所以：　$\sin\gamma=\frac{b\sin\alpha}{a+c\cos\alpha}$，　$\gamma=\arcsin\frac{b\sin\alpha}{a+c\cos\alpha}$

因为：　$S_{\widehat{ODQ}}=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\pi\gamma}{360°}$

$$\frac{S_{\widehat{ODQ}}}{S_{\widehat{ODQ}}}=\frac{b}{a}$$

$$S_{\widehat{ODP}}=\frac{b}{a}S_{\widehat{ODQ}}=\frac{\pi ab\gamma}{360}=\frac{\pi ab}{360}\arcsin\frac{b\sin\alpha}{a+c\cos\alpha}$$

又　$S_{\Delta OF_1P}=\frac{1}{2}PT\cdot OF_1=\frac{c}{2}\cdot\frac{b^2\sin\alpha}{a+c\cos\alpha}$

所以：　$S_{\widehat{DF_1P}}=S_{\widehat{ODP}}-S_{\Delta OF_1P}$

$$=\frac{\pi ab}{360}\arcsin\frac{b\sin\alpha}{a+c\cos\alpha}-\frac{1}{2}\frac{b^2c\sin\alpha}{a+c\cos\alpha}$$

(2)以积求角

已知面积 $S_{\widehat{AFP}}=1°$ 平圆之面积(指中率圆,即圆半径为$\sqrt{ab}$),求∠AFP?(图 20)。

设∠AFP＝θ,延长 FA 至 T,使 FT＝$\sqrt{ab}$,以 F 为圆心,FT 为半径作弧,交 FP 的延长线于 Q。由于∠AFP 很小,故可视椭圆扇形 FAP∽圆扇形 FTQ。所以：

$S_{\widehat{AFP}}:S_{\widehat{FTP}}=FA^2:FT^2$

$S_{\widehat{FTQ}}=\frac{FT^2}{FA^2}S_{AFP}=\frac{\pi a^2b^2\cdot 1°}{360°(a-c)^2}$

又　$S_{\widehat{FTQ}}=\frac{1}{2}(\sqrt{ab})^2\cdot\theta=\frac{\pi ab}{360}\theta$

所以：$\theta=\frac{ab}{(a-c)^2}$

如果面积 $AFP_1$ 为 2° 中率圆面积,则先求出 FP 之长度,然后用与上述相仿的方法求出$\angle PFP_1=\theta_1$,则$\angle AFP=\theta+\theta_1$,仿此可逐度计算。因为 $FA<FP<FP_1$,所以这只是一种近似方法,θ、$\theta_1$ 越小,误差越小。

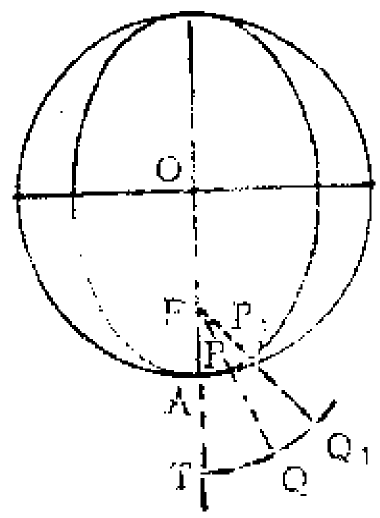



图 20

(3)借积求积

已知∠QOA＝γ,求∠PFA＝α,使面积 $S_{PFA}$＝面积 $S_{P_1FA}$(图 21)。

因为 $S_{\widehat{QOA}}:S_{\widehat{P_1OA}}=a:b$

所以：$S_{\widehat{P_1OA}}=\frac{b}{a}S_{\widehat{QOA}}=\frac{1}{2}ab\gamma$,　而　$\mathrm{tg}\angle P_1OA=\frac{b}{a}\mathrm{tg}\gamma$

由此解得$\angle P_1OA=\beta_1$。又作 $F'P_2/\!/OP_1$,连接 $FP_2$,则$\angle OF'P=\angle AOP_1=\beta_1$。作 FT⊥F'P 交 F'P 于 T,则：

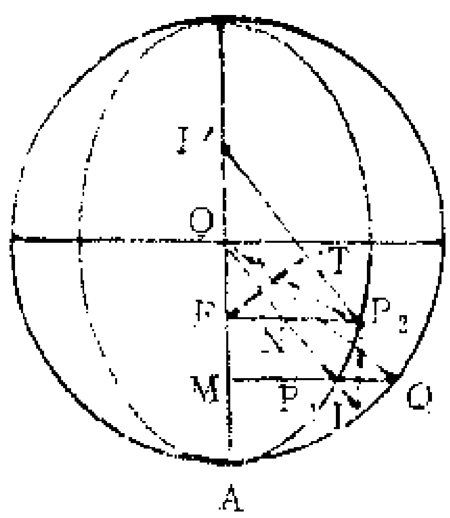



图 21

$FT=2c\sin\beta_1$,　　$F'T=2c\cos\beta_1$

$FP_2+P_2T=2a-F'T=2a-2c\cos\beta_1$

$FP_2-P_2T=\frac{FT^2}{FP_2+P_2T}=\frac{2c^2\sin^2\beta_1}{a-c\cos\beta_1}$

$FP_2=\frac{a^2+c^2-2ac\cos\beta_1}{a-c\cos\beta_1}$

设$\angle FP_2T=\beta_2$,则 $\sin\beta_2=\frac{FT}{FP_2}=\frac{2c\sin\beta_1(a-c\cos\beta_1)}{a^2+c^2-2ac\cos\beta_1}$。　令$\angle P_2FA=\beta_1+\beta_2=\alpha$,过 $P_2$ 点作 OF 的平行线交 $OP_1$ 的延长线于 I 则：$P_2I=OF$,故 $\triangle OFN\cong\triangle NP_2I$

那么：$S_{\widehat{AOP_1}}-S_{\widehat{AFP_2}}=S_{\widehat{P_1IP_2}}$

显然 $S_{\widehat{AFP_1}}<S_{\widehat{AFP_2}}$，则 P 点的位置应在 $P_2$ 之前，如果 P 点在 $P_3$ 位置（图 23），那么 $S_{P_2FP_1}=S_{P_2IP_1}$，因为 $S_{P_1OP_2}=S_{OP_2A}-S_{OP_1A}$

$$S_{OP_2I}=\frac{1}{2}IL\cdot OF'=\frac{C}{2}IL,$$

由此可求得 $S_{P_2IP_1}=S_{OP_2I}-S_{P_1OP_2}$ 再依以积求角法即可出 $S_{P_3FA}$ 之面积。若 $S_{P_3FA}=S_{P_1OA}$ 则 $P_3$ 为所求之 P 点，若 $S_{P_3FA}<S_{P_1OA}$，则 P 点应在 $P_3$ 之前，若 $S_{P_3FA}>S_{P_1OA}$，则 P 点应在 $P_3$ 之后、$P_2$ 之前，如果重复寻找 P 点，可逼近我们所要求的精度。但"推算则属繁难，故又设后法"。

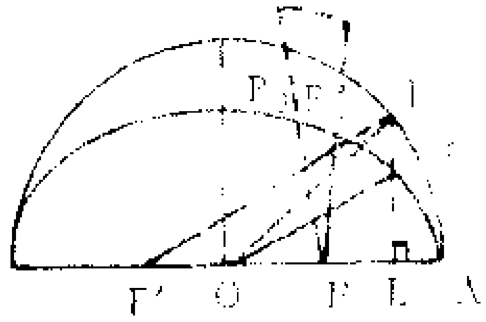



图 22

(4)借角求角

已知$\angle AOQ=\gamma$，在椭圆上求作一点 P，使 PF 与 FA 所围成的面积 $S_{PFA}=S_{P_1OA}$，这一问题与前一问题完全相同。如图 23，OQ 交椭圆于 N，过 N 作 $Q_1M_1\perp OA$，$\angle Q_1ON$ 称为椭圆差角。作 $F'P\parallel OQ_1$，交椭圆于 P，连接 PF。《后编》认为这样选取的 P 可使 $S_{PFA}\approx S_{P_1OA}$（原书有证明，此处从略）。

现在须求出$\angle PFA$。

由 $\operatorname{tg}\angle Q_1OA=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\gamma$，可解得$\angle Q_1OA=\beta_1=\angle PF'O$，延长 F'P 至 E，使 PE=FP，在 $\Delta F'EF$ 中已知 $F'F=2c$，$F'E=2a$，$\angle PF'O=\beta_1$，可求出$\angle F'EF=\beta_2$，而$\angle PFA=\beta_1+\beta_2$。这一方法运算步骤较简，但结果精确度稍差。

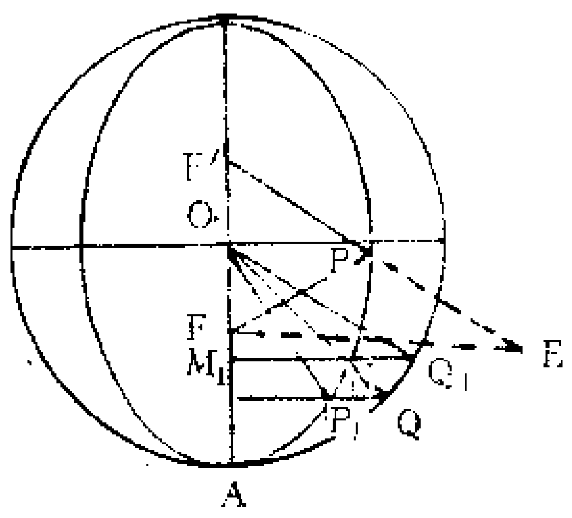



图 23

如果我们把椭圆上任意一点到一个焦点的连线称为焦点向径，上述第(1)种方法解决的是，已知从一个焦点引出的两条焦点向径间的夹角，求焦点向径所扫过的面积问题，这一方法所得结果为精确值。第(2)—(4)种方法讨论怎样将椭圆扇形面积（椭圆上两点与中心的连线和椭弧围成的面积）转化为焦点向径面积（椭圆上两点与焦点的连线和椭弧围成的面积）。在微积分引进前，这些都属椭圆计算中较复杂的问题。

《后编》在阐述上面问题时，使用的是中国古典数学著作常用的范例方法，即用一个具体的运算实例来介绍整个计算过程。约半个世纪后，焦循(1763—1820)在《释椭》中用公式性的语言解释了《后编》中的椭圆计算问题，并在计算方法上稍有改进。

综上所述，在明末清初，有关椭圆的一些主要知识已传入我国，中国数学家在椭圆知识的应用方面也取得了某些创造性成果。椭圆知识的传入，不仅为中国数学增添了新内容，而且也为以后中国数学家在这方面的研究工作奠定了基础。

本文在写作过程中得到李迪先生悉心指导，特此致谢。

## 参考文献

〔1〕〔2〕《测量全义》卷五"测面"。

〔2〕 美 C·H 爱德华著,张鸿林译:《微积分发展史》,北京出版社,1987 年 12 月,第 55—57 页。

〔3〕 〔4〕 〔5〕 《测量全义》卷六“测体”。

〔6〕 〔7〕 《测天约说》上,“测量学十八题”之第一题。

〔8〕 刘步林:《数学在天文学中的运用》,科学出版社,1979 年,第 245 页中图。

〔9〕 〔10〕 〔11〕 李兆华:“关于《数理精蕴》的若干问题,”《内蒙古师大学报》自然科学版,1983 年第 2 期,第 66—86 页。

〔13〕 李俨:“中算家的圆锥曲线说”(《中算史论丛》第三辑,科学出版社,1955 年,第 519 页)认为《交食历指》已传入椭圆基本定理,笔者以为有待进一步研究。

〔14〕 钱宝琮:“中国算书中之周率研究”,见《钱宝琮科学史论文选集》,科学出版社,1983 年第 74 页。

〔15〕 《历象考成后编》卷一。

〔16〕 〔法〕阿达玛著,朱德祥译:《几何·立体部分》上海科技出版社,1980,第 421 页。

〔17〕 薄树人:“清代对开普勒方程的研究”,《中国天文学史文集》第三集,科学出版社,1984。

# 欧洲数学在康熙年间的传播情况

## ——傅圣泽介绍符号代数尝试的失败①

（法）Catherine JAMI

## 一　引言

17世纪至18世纪，耶稣会士把一些西方科学知识介绍到中国。众所周知，他们这样做的目的不是为了促进当时正在发展的近代科学，他们只是把科学知识作为一种引起中国学者对基督教感兴趣的手段。②然而，他们对中国的科学，特别是数学和天文学，产生了非常重要的影响。

在研究这种传播现象时，有必要考虑影响中国人吸收外来科学知识的几个因素，如：

耶稣会的科学背景，文化；

接受外来知识的中国制度和知识分子结构；

双方政治和宗教时代背景的影响；

传播的确切内容；

这种传播是怎样产生的？耶稣会士和中国人接触的实质是什么？

耶稣会士在中国的两个世纪中，上述这些因素当然不是一成不变的。

这一节我要介绍的（这是中国科学史家了解得很少的）是1712年—1713年，一个法国传教士试图教康熙学符号代数的情况，这对耶稣会士在华以科学家身份从事科学研究的状况，以及当时西方数学是怎样通过他们传播的，都是一个很好的说明。

由于康熙皇帝的宽容和他本人对西方科学的兴趣，传教和科学在他统治时期（1662年—1722年）都非常繁荣。耶稣会士自17世纪三十年代起一直作为文职人员在钦天监（皇家天文台）工作。他们以第谷的理论为基础从事天文工作。1685年，路易十四派遣法国传教士去中国，其中一部分是有国王数学家称号的科学家。他们带去的科学仪器和书籍比当时在钦天监工作的耶稣会士所应用和传授的更为先进。他们一直与法国皇家科学院保持通信联系。③这些传教士早于南怀仁（Verbiest）成为康熙的老师。从他们自己记述来看，他们经常同康熙见面，

---

① 本文中提出的一些结论是笔者1985年11月在罗马法国学校完成的。感谢弗朗索·德·岗（Francois de Gandt），是他的著作使笔者非常顺利地在耶稣会士的档案中找到了所需资料，我还要感谢Richard Epstein对本文的审阅。

② 参阅热尔内（Gernet）（1）（见参考文献）。

③ 关于法国耶稣传教团的起源，见亚米（Jami）（1）第14—17页，皮诺（Pinot）（1）第40—43页，第422—423页。

教康熙某些学科（数学、天文、音乐、解剖等）。但是，他们几乎没有和别的中国人--特别是科学家直接接触，大多数情况下是康熙作双方的中间人。①

可以说，在18世纪初，中国数学家就已经吸收了17世纪初传入的基础知识（欧几里德几何，写算）。他们不再仅仅是耶稣会士的学生，而是有能力对西方新方法采取批评态度，有独立能力的数学家（梅文鼎② 就是一例）。

## 二 代数新法

1712年夏，一位法国耶稣会士，傅圣泽（Jean－Francois Foucquet 1665－1741）③ 为康熙写了一篇文章，文章的题目是"阿尔热巴新法"（代数新法）。显然，这篇文章是第一次在中国介绍符号代数。

在概述这篇文章的内容和历史之前，应该指出1712年夏天之前，耶稣会士没有介绍过符号代数，中国人也不知道符号代数：在当时很早以前就失传的传统代数是以位值制为基础的。此外，解决线性问题传统的方程法（也采用位值制）仍在使用。根据梅瑴成《赤水遗珍》来看，与"代数"汉文抄本（有不同的抄本）有联系的是一个未知数方程的解法。这个方法叫借根方比例，康熙1711年就知道《数理精蕴》（数学百科全书，1723年出版）中解释了借根方比例。④傅圣泽的代数方法与之相比就是"新"法。

1711年以后，傅圣泽一直为康熙从事天文工作，根据他自己的记述，⑤ 一天当他们在一起时"陛下开始谈起代数……他望着我，想知道我对代数的想法"。傅圣泽回答康熙时，提到了"一种新代数"，它比"旧"代数更简单、一般。讨论结束时，康熙要傅圣泽以此为题写一篇文章。写好的几章呈送给康熙帝（他当时在热河避暑），另一个法国耶稣会士，康熙帝身边的随从人员杜德美（Jartoux）⑥ 解释给他听。

由于杜德美生病，傅圣泽的文章正要涉及二次方程时中断。一年以后，康熙帝试图和他几个儿子看这篇文章，他的这几个儿子都学习过西方数学。他们发现这篇文章"晦涩"且（比旧法）"更难"。⑦在一份及时送给傅圣泽的说明中，康熙帝明确地表达了自己的看法"……在我来看，此人（傅圣泽）的代数非常简单和极为不足。总之，它是很可笑的。"⑧ 在我们看来，第一次试图把符号代数介绍给中国就这样结束了。傅圣泽在他的记述中也承认这是一个

---

① 参阅德·托马·布瓦西埃（de Thomaz de Boissierre）（1）第55页

② 马若安（Martcloff）（1）。

③ 傅圣泽（J. F. Foucquet 1665－1741）1701年至1720年在华，在华期间以Virulent figurist著名，回欧洲后为孟德斯鸠（Montesquieu）提供有关中国的情况。（Witek（1））

④ 李俨（1）第三集，第61页。

⑤ 傅圣泽（1）第21－22页。

⑥ 杜德美（Petrus Jartoux（1669－1720）与傅圣泽一样，1701年到华，他是教康熙数学、天文的老师之一，参加过中国地图的绘制（1707－1717）。

⑦ 傅圣泽（1）第22页。

⑧ 罗马梵蒂冈教皇图书馆中文部分439A（s）。

失败；这一点可以通过19世纪中期以前，[①] 没有一本中国数学著作涉及符号代数的内容而得到证实。如前所述，显然《数理精蕴》是按照康熙的旨意由数学家们编写的。[②] 当傅圣泽在写他的文章时，这些数学家们已经在皇宫编写《数理精蕴》，在此书中未提到任何有关于此的情况。

我对傅圣泽文章的研究是根据梵蒂冈图书馆中一本书名为《阿尔热巴拉新法》（代数新法）的中文手稿（罗马梵蒂冈教皇图书馆中文部分319（a））进行的。根据傅圣泽自己论述的在北京的科学活动（罗马梵蒂冈教皇图书馆拉丁文部分566号第144—183页，罗马市罗马学会中日本11第154页，前者好像是后者的草本）来看，这份手稿不是呈送给康熙那份的抄本，至少也是它的草本。[③] 傅圣泽还用法文写了一篇"代数概论"（Abrege d'Algebre）* （拉丁文部分516，第132—156页），它好象是中文的那篇文章的法文草稿本，傅圣泽的主要资料来源很可能是普列斯特（Prestet）的《数学新基础》（Nouveaux Elements de Mathematiques）。至于他的中文手抄本，很可能与李俨的藏本相同。[④]

这篇文章的第一部分说明"新"、"旧"代数之间的不同之处，强调了"新代数"的一般性和实用性，以及用符号进行四则运算的基本法则（用天干、地支表示相应的字母，天干表示系数，地支表示未知数）。第二部分，在方程按次数分类，线性方程组按方程和未知数的个数分类之后开始涉及线性问题的解法。解线性方程组的方法是一种代换（附1）。

我不打算详细介绍"代数新法"，[⑤] 我的目的是阐明什么东西促使康熙对它作出这样的反应。康熙对"代数新法"的批评是精辟的，而并非毫无理由。

对傅圣泽来说代数新法既容易又更具一般性。更一般性，这是因为它在有一个未知数和几个未知数时既能解决线性问题，又能解决非线性问题，这样，就统一了当时在《九章算术》不同的两章方程（第8章）、少广（第4章）中出现的两个不同数学分支。但是，傅圣泽实际上没有论述非线性方程的解法，而且，由于方程章的方法对于解决线性方程来说已经相当满意，这样，康熙和他的儿子们没有看出"新代数"的新奇之处也就可以理解了。

另一方面，傅圣泽认为符号代数容易，而康熙皇帝不理解符号乘法运算的意义："甲乘甲，乙乘乙不给出任何数字，人们不知道这个结果的值"[⑥]。数字和符号四则运算的对比在文章中是通过两个正方形面积相同的计算来说明的。一边为12=10+2，另一边是甲+乙（A+B）（附2）。但是，傅圣泽对符号与数以及符号与组成一个数的每一位数字之间的平行性都没有搞清楚；由于非常熟悉符号代数，傅圣泽显然没有注意到造成另外一个混乱的原因。这个原因就是两个数字并列是按照位值制来理解而两个代数符号的并列是按结果来理解。这当然与把

---

① 中国出版的第一本关于符号代数的书是1859年伟烈亚力、李善兰合译的棣么甘（De Morgan）的《代数学》（Elements of Algebra）（1835年），现代术语中用代数表示Algebra就是在那时介绍的。

② 就是在这种情况下，梅毂成重新发现了用借根方法解一个未知数的宋元代数的意义。

③ Witek（1）第166—187页注89列出了傅圣泽科学手稿目录（大部分涉及天文学）。好象是他第一个确是"代数新法"的作者，但是他没有讨论它的数学内容还指出它可能对《数理精蕴》的作者产生影响。

* 翻译原文的法文部分得到吴博哲教授的帮助，谨志谢忱。—译者注。

④ 在李俨的几本著作中提到这个问题。李俨、杜石然（1）第222页对这本手稿中的位值制的应用作了简短叙述，这本手稿的确与梵蒂冈图书馆中的一本抄本相同。

⑤ 详细的论述参阅Jami（1）第60—92页。

⑥ 罗马梵蒂冈教皇图书馆中文部分439A（a）。

代数也用位值制表达的中国传统完全一致。

## 三　介绍代数的年代

彭说“至于康熙学习代数的老师姓名和年代，现在都不清楚。”① 李俨和杜石然认为符号代数是在《数理精蕴》完成以后介绍的。② 此外，马若安③ 认为耶稣会士开始传授符号代数，因为它不太好懂，于是他们得不求助于一种简单的记法。

傅圣泽的法文手稿使我们知道了确切的年代，傅圣泽在1712年—1713年试图向康熙解释符号代数之前，康熙在1711④ 年学习了借根方非符号代数，另外，编纂《数理精蕴》的圣旨是在1713⑤ 年下达的，由于康熙对“新代数”的否定态度，⑥ 因此，《数理精蕴》只含有借根方法。

## 四　科学传播的条件

康熙不仅本人对数学感兴趣，而且还创立一种研究院来促进它的研究。这个研究院由他的第三个儿子*（与康熙一同看傅圣泽论文的儿子中的一个，他精通天文历算）领导。年青的科学家在研究院里一边学习一边从事研究工作。⑦ 这一措施一部分是为了以科学自主的态度接受和研究耶稣会士传授的科学知识。然则，如前所述，傅圣泽在北京从事科学活动的时候好像没有这个研究院**，且这个研究院的成员也没有单独直接与傅圣泽接触，讨论科学问题。⑧（他们有时也确实与耶稣会士在一起工作，如绘制中国地图）。康熙帝总是他们之间的中间人。在傅圣泽写“代数新法”时，康熙帝是科学问题的最高法官；这样，一门新学科由于他个人的好奇就得以介绍，而由于他自己不懂又定为无用。

至于耶稣会士对科学传播的态度，傅圣泽的记述也非常有趣。他在使康熙开始认识到有比他在钦天监工作的前辈和同代人教授和应用的更为先进的方法和思想之前，已不止一次向康熙提到有“新代数”。由于傅圣泽告诉康熙欧洲有一些新发现，这些发现能改进第谷的天文理论，很显然也就是用椭圆轨道代替圆形轨道，⑨ 这就引起了在华耶稣会士之间关于应用什么，传授什么科学知识的一次主要论争，在这场论争中法国耶稣会士与其它耶稣会士意见不

---

① 彭（1）第401页。

② 李俨，杜石然（1）第222页。

③ 马若安（1）第106页。在欧洲数学著作中文改写本目录中（第334页），给出的“代数新法”的成书年代1689年是不正确的。

④ 李俨（1）第三卷，第61页。

⑤ 根据李俨（1），卷3第61—63页，《数理精蕴》的编写年代是1714年—1722年。

⑥ 因此，我们的结论与Witek认为“代数新法”对《数理精蕴》中的代数产生了一定影响相反。

* 允祉，曾率何国宗等编撰《律历渊源》。《清史稿》卷二百二十。——译者注。

⑦ 傅圣泽（1）第3—4页提到了算学馆的成立。

** 算学馆成立于1713年。——译者注。

⑧ 自利玛窦时代以来，这是一个重要的变化。耶稣会士在中国联合的制度似乎不利于他们直接和间接地同中国学者讨论。

⑨ 傅圣泽（1）。

同。据我所知，没有证据表明傅圣泽有介绍开普勒理论的打算，[①] 然而，他受到了钦天监耶稣会士的严厉责备。他们提出最主要的反对理由是傅圣泽介绍新方法，怀疑他的前辈（如汤若望、* 南怀仁等）以及指出他们理论的错误，傅圣泽回击道中国人有能力独自发现根据第谷理论计算出来结果的错误（他们确实也给出了），因此，耶稣会士再不能象 17 世纪那样为他们的观点继续进行辩护．此外，耶稣会士传授给中国人新的和更难的知识是他们自己必不可少的事．只有这样，他们在中国长期呆下去的可能性才能得到保证。

以上的看法揭示了科学和宗教真理观念的一致性，即永恒性和不可变性。这并不意味着中国人有很高的科学才能或很高的科学价值观。此外、尽管傅圣泽基本的动机巧妙，非科学，但他的科学观可以说是比较先进的。在所有这些论争中，用西方科学观来看，一个非常重要的问题从未提及，日心学的正确性 18 世纪初在欧州已得到人们的普遍承认，但没有一个耶稣会士考虑过在中国介绍它的可能性。然而，不管傅圣泽和其他法国传教士的科学知识有多么先进，他们从未把科学看作一门独立的活动。“保守派”和“革新派”的态度都屈从于传教的利益。

## 五 结 论

如果没有“代数新法”的档案资料，要重新指出代数介绍到中国的年代是不可能的。傅圣泽数学文章的内容在中国数学史上当然是次要的，但它对于说明在当时那样的条件下科学传播取决于吸收的可能性是非常有趣的。[②]

如果我们考虑到在引言中提到的传播条件的图案，法国耶稣会士比较近代的科学文化背景没有导致西方科学知识在中国普遍近代化是很明显的。在傅圣泽从事科学活动的论述中，最引人注目的是耶稣会士之间在科学问题上缺乏协作（如他们的天文工作）以及缺乏一份全面的、始终如一的科学计划，这也许就是科学受传教目的、宗教的影响而产生的结果。但是，另一方面似乎在两个科学概念之间有冲突：在宗教目的所允许的范围内，法国耶稣会士也许更为接近那个时代欧洲科学家的精神。

在中国方面，康熙本人对西方数学的兴趣确实是一个重要的刺激因素。但是，另一方面在科学制度组织上康熙帝是科学问题的最高法官，也就是说科学家们主要根据康熙帝的观点和权力来行使自己的职责，这就没有为科学的发展创造最好的条件。

还有几个阻碍符号代数传播的因素。首先，“代数新法”只限于线性方程。其次，它只教给一个人（康熙），虽然他精通数学，但毕竟不是一个数学家。再次，傅圣泽既没有考虑他学生的文化背景（耶稣会士普遍忽视中国的数学）也没有看到符号位置和位值制之间的关系，特别是它们的不同，这就造成了学习的主要困难。

---

① 这是 Witek（1）第 181－189 页指出的。通过研究梵蒂冈图书馆中的中文天文学手稿也许能解决这个问题。

* 汤若望（Jean Adam Schall Von Bell）（15691－1666）德国人，1622 年来华，1666 年在北京逝世。—译者注

② 据我所知，直到现在，没有几个国家给出有关耶稣会士在华科学活动的情况有比傅圣泽法文手稿更为详细的。

## 参考文献

德·托马·德·布瓦西埃 (de Thomaz de Boissierre Y) (1)
《十七、十八世纪中国朝廷中的比利时官员安东·托马斯 (1644—1704) (汉名音 Ngan To Ping—che)》，巴黎 (文学出版社)，1977。

傅圣泽 (1) 关于1711年6月至1716年11月初欧洲天文学在北京的情况纪实，手稿，藏罗马市罗马学会档案中日本，中国卷11，154号，第83页。

傅圣泽 (2) 阿尔热巴拉新法，手稿，藏罗马市梵蒂冈教皇图书馆中文部319 (4) 号。

丁·热尔内 (Gernet J) (1)《中国与基督教》，巴黎 (加利玛出版社)，1982年。

亚米 (C, Jami) (1)；傅圣泽与中国科学的近代化："代数新法"一文介绍，巴黎大学第七期《学术论文集》，1986年。

李俨 (1)：《中算史论丛》，北京，1954年—1955年。

李俨、杜石然 (1)：《中国古代数学简史》J. N. Crossley 和 A. W. C Lun 译，牛津 (Clarendon 出版社) 1987年。

马若安 (Martzloff J. C.) (1)：梅文鼎数学著作研究，巴黎 (法兰西学院中国高级学术研究所论文集)，1980年。

彭 (Peng R. P.) (1)：康熙对数学、天文的爱好以及他对科学知识的广泛应用，历史学报，1975年第3期，第349—522页。

U. 皮诺 (Pinot U.) (1)：《中国与法国哲学精神的形成》，巴黎 (保罗·热特内出版)，1932年。

J. 波特尔 (Porter J.) (1)：近代中国早期的官僚政治与科学，清代的钦天监，东方研究，第18卷第1期，1980年，第61—76页。

J. 波特尔 (2)：中国近代早期的科学团体，爱雪斯，第73卷 (1982)，第529—544页。

J. 普列斯特 (Prestest J.) (1)：《数学新基础》，巴黎，1695年。

Witek J (1)：傅圣泽传——一个中国和欧洲有争议的人物，罗马，1982年。

(徐义保译自第五届国际中国科学史会议论文：*The Conditions of Transmission of European* Mathematics at the Time of Congxi; J. F. Foucguet's Unsuccessful Attempt to Introduce Symbolic Algebra，余永先校)

# 清代中期数学家焦循与李锐之间的几封信

郭世荣
（内蒙古师范大学科学史研究所）

之[illegible]绕此成圈，必大于本圈，而不同于不同心圈与伏见轮之状。或者火星之次轮本割入太阳天内，高卑之差缘是以起。然又无从得其贯通。窃思弟谷以来，诸轮之设或左行、或右行、或倍行、或三倍行、或自远、或自近、或自平远、或以本轮为心，大率皆以实测所得之数假为法象，以曲求其合，故不能比而同之也。循愚顿多疑惑，梅江之说有不能了然于心，惟明教之，幸甚！[1]

此信写于嘉庆元年，在二月十三日以前不久。焦循也是一位名学者，治经颇有功底，尤其是在易学研究方面引人注目。他在天算方面的主要著作有《大衍求一术》一卷、《开方通释》、《乘方通释》还有《里堂学算记》五种，包括《释弧》三卷、《释轮》二卷、《释椭》一卷、《加减乘除释》八卷、《天元一释》二卷。《释弧》初稿成于乾隆六十年秋冬季，接着，焦氏着手写作《释轮》，次年二月完成，九月，他又完成了《释椭》。这三部书是相互关联的。《释弧》主要讲述球面三角学，《释轮》则进一步阐述了球面三角在天文学中的应用和天体运行理论。焦氏在谈到这两书的关系时说："循既述《释弧》三篇，所以明步天之用也。然弧线之生缘于诸轮。轮径相交，乃成三角之象，轮之弗明，法无从附也，拟为《释轮》两篇。"[2]这也表明了他撰写《释轮》的动机。《释轮》上卷讲述七政运行模型，讨论均轮、本轮诸轮的设立及其原理，下卷讲述与诸轮有关的各种计算问题，球面三角学是主要的数学工具。焦循给钱大昕写信所要讨论的问题属于天体运行理论的内容。

他提出两个问题。第一，对梅文鼎所谓"次轮上实体尝向太阳推之"的说法提出质疑，特举月球的运行情况来说明梅氏的结论不对。第二，江永说"诸星岁轮应日之本轮，火星独应日体，故有太阳高卑。"焦氏不同意他对"高卑差"的解释，这两个问题在《释轮》中都有论述，观点也与此信所述相同，应当注意的是，焦循的一个基本看法为：诸轮之设"皆以实测假为法象，以曲求其合，故不能比而同之也。"这是完全正确的，《释轮》卷上对此做了更加明确的论述。

钱大昕接到焦循的信后，把它交给李锐来处理。李锐"深于天文算术，江以南第一人也。"[3]他是钱大昕的得意门生，深受钱氏器重和赏识。钱大昕以通儒第一，平时绝不轻易赞许别人，唯独认为李锐超过了自己[4]。他们既是师生关系，又是亲密的合作者。李锐是钱氏的得力助手，有时甚至是他的学术顾问，钱大昕"晚年主讲紫阳书院，日以审群书校雠为事，遇有疑义，辄与(李)锐商榷。"[4]李锐这次代乃师处理信件，最大的收获便是开始了与焦循二十多年的交往，日后他们成了好友。

李锐研究了焦循的信后，给他写了第一封信：

二月十三日元和教弟李锐顿首！奉书理堂先生足下。锐侧闻大名久矣，以不得一见为恨。本月十二日，谒竹汀师，接到寄惠《群经宫室图》一部，拜领之下，感谢无已。读足下与竹汀师书，知足下于推步之学甚精，议论俱极允当，不可移易。

盖月体之与次轮既行倍离之度，则其体势自与七政之在本轮不同。而日体既周行次轮，则围绕一周自不能成大圈与本天等。火星岁轮径既有小大，则其轨迹自不能等于本天。反覆数四，觉前人所说第举其大分，而足下更能推极其精密昌胜，承教佩服之至。足下又云有其当然，亦必有所以然。锐愚以为，其所以然，不外乎其所当然也。何者？古法有三统以来，见存者约四十家，其于日月之盈缩迟疾、五星之归留伏逆，皆言其当然而不言其所以然。

本朝时宪书甲子元用诸轮法，癸卯元用椭圆法，及穆尼阁新西法用不同心天，蒋友仁所说地动仪，设太阳不动而地球如七曜之流转，此言其当然，而又设言其所以然。然其当然者，悉凭实测，其所以然者，止就一家之说，衍而极之，以明算理而已。是故月五星之有加减，其故由于有本轮、次轮，而其实所以有本轮、均轮，其故仍由于实测之时当有加减也。以是推之，则月体一周不能成大圈与本天等，其故由于有次轮，而所以有次轮，则由于朔望以前当有加减也。火星轨迹不能等于本天，其故由于岁轮径有大小，而所以轮径有大小，则由于以无消长之轮，径算火星犹有不合，而更宜有加减也。若不此之求或于诸曜之性情冷热，则究其交关之故，转属支离矣。狂瞽之见，以质高明，是否有当，统祈裁正！[5]

此信写于嘉庆元年二月十三日。开头一段说明缘起，其中竹汀即是钱大昕，《群经宫室图》二卷是焦循的一部著作，主要考论古代宫室的构造仪式，系由钱大昕转赠李锐的。接着，李锐对焦氏所提问题陈述了自己的见解，他也主要讲了两个问题。其一，对天体运行模型中的诸轮做了一定的分析说明。焦循发现前人的解释与自己的研究结果不同，但苦于“无从得其贯通”，李锐则试图说明个中原委。但李氏的解释最终没有使焦氏完全信服[6]。其二，他也赞同实测为基础的观点，认为诸轮法、椭圆法乃至地动说等都是以实测为依据的，只是各家对天体运行原理的解释不同而已。这部分内容被焦循列在了《释轮》之首①，作为序文。

李锐此信首先送到了钱大昕手里，钱氏又让他的学生蒋于野带给了焦循，同时，他还写了一封信，作为他们之间的桥梁。钱氏在信中介绍了李锐，并赞扬了焦氏，他写道：

接到手教，如亲声欬，前于黄宗易处已领得大制《（群经）宫室图》，兹复见惠，已分一部致李生尚之，并将尊札付其阅看。伊亦深佩服，以不得握手为恨。所论月五星诸轮，推阐入微。以实测之数假立法象，以求其合，尤为洞澈根原。弟衰病不能进于此道，当赖英绝领袖之耳。舍弟在幕，想时亲高论。兹托蒋生于野附致寸函，并候起居。不戬弟大昕顿首！[7]

焦循在收到李锐的信后，很快便给李锐复了一信，信的内容不详，不过从李锐给焦循的第二封信中可略知其梗概。一个月后，即嘉庆元年三月二十五日，李锐给焦循写了如下一封信：

愚弟期李锐顿首，覆理堂仁兄足下：二十四日同门蒋山枉过敝庐，接到尊札二通。知锐前发书已赐览，并蒙许可，兼欲观锐著书。夫锐何敢言著书？锐少时失学，年二十余尚不知有学问之事。辛亥冬间，从竹汀师游，受推步算术之学，迄今将五六年，稍能窥见藩篱，而后知此道之精微广大，有毕世为之不能尽者，是故有大愿焉，请为足下陈之。

中法自《三统》以至《授时》、《大统》，载在廿四史者甚备。然史学家自吾师考异而外罕言及者。意欲随术讨论，于法之隐奥者详说之，字之误者正之，文之脱者补之，不可考者阙之。俾古人创造之法愈改愈密之苦心不致泯没无传，则所愿一也。本朝时宪书用西法本轮、次轮，以及椭圆面积之术，至精密矣。溯其所自来，唐有《九执（历）》，元明有《回回》二家，国初又有未经行用之穆尼阁《天步真原》。是三术者，《九执》则传写脱误处甚多，《回回》则月分最高之元术中并未明载，穆尼阁则（薛）仪甫所译，言

① 各版本引用此信均多寡不同，《里堂学算记》本所引为节一部分，《焦氏遗书》本则录用全文。

之不详。亦思有以剖析之，使谈西学者知彼中测验亦由疏而密，非一蹴可到，则所愿又一也。唐宋相传有算学十书，今《缀术》亡矣，存有九种。《周髀》为盖天遗说，《九章》于算数之事纲举目张，《海岛》用矩表测望高深广远，《缉古》(带)从开立方，为后来立天元一、借根方之所自出，孝通自云，如有排其一字，臣欲谢以千金，则其立术之精深可知矣。亦欲一一究明其所以然，无所疑惑而后快，则所愿又一也。有此诸愿，非易猝偿。鄙意又亟欲明所未明，而不暇说其所已知。是以间有所得，便记在书之上端，或写于片纸，都未辑录，又或写有成卷，又经涂改，俱不可以呈览，尚望置缓之。令少有定见，当录正请教也。足下经术闻名以久，步天之学去岁方得知。锐识见浅陋，恒以才质薄弱，不能自立为惧，足下倘谅其求道之苦衷，而有以进教之，则幸甚，幸甚！草此奉覆，未尽欲言。锐再拜！

算书难得，锐所渴望一见而未得者甚多，今略开四种如后，倘兄处有此，能寄来一读，则惠我多矣！

宋秦九韶《数书九章》十八卷、元李冶《测圆海镜》十二卷、《益古演段》二卷、国朝王寅旭《晓庵新法》六卷。[8]

从这封信可知，焦循在复信中非常希望和李锐交流，期望能够读到李氏的著作。李锐在这里说明自己暂时尚无可公开的著作，待日后“少有定见”，“当录正请教也”。他也表示了进一步加强联系、互相交流的愿望，并不失时机地向焦循借阅数学及天文学书籍，可见他学习天算的心情是十分迫切的。在简要介绍了自己的情况之后，李锐特别详细地陈述了他的科研规划和宏大志向，他把自己的奋斗目标归结为三“愿”。第一愿：全面研究中国传统天文历法，对古代各家历法进行综合分析、补缺正误、阐微发隐，“俾古人创造之法愈改愈密之苦心不致泯没无传”；第二愿：研究外国历法，“使谈西学者知彼中测验亦由疏而密，非一蹴可到”；第三愿：研究中国传统数学，特别是《算经十书》，阐述中国古代数学的精髓，“欲一一究明其所以然，无所疑惑而后快。”

从李锐的三大愿，可见他宏扬祖国传统科学的决心和信心。他立志献身天算研究，以发掘整理古代科学遗产为已任，并以此做为毕生奋斗的目标。同时，我们由此也可看出他受乾嘉学派的影响是相当深的，特别是他的老师钱大昕的治学方法对他的作用很大。另外，李锐表达了刻意创新、不苟同前人、既尊重历史又不为历史所囿的治学态度，他“亟欲明其所未明，而又不暇说其所已知。”

李锐在天算研究方面确实花费了极大的精力，做了大量有益的工作，著述也不少。他已出版的著作有《诏诰日名考》、《三统术注》、《四分术注》、《乾象术注》、《奉元术注》、《占天术注》、《日法朔余强弱考》、《方程新术草》、《句股算术细草》、《弧矢算术细草》、《开方说》等。以上十一种合称《李氏遗书》，这些书生前出版的极少，多数是他死后经朋友们整理刊刻的。此外，他还校注了《测圆海镜》、《益古演段》、《数书九章》、《四元玉鉴》等宋元数学著作，又和张敦仁等合作了《缉古算经细草》。据他的《观妙居日记》所记，他校勘过宋本《九章算术》、《孙子算经》，曾写有《海岛算经图解》一卷、《明代朔闰考》、《回回术元考》、《宋金六术》六卷、《四分术钤》、《中朔大小余》、《春秋假术》等手稿，可惜这些书未能最后定稿，初稿也没有流传下来，从总体上来看，李锐在二十六、七岁时确立的三个奋斗目标最终还是没有完全实现。这不仅由于要实现他的目标需要做大量的研究工作，而且他的生活状况也对其

研究进展有较大的影响，拮据的经济状况和屡试不第的仕途道路使他终日为生活而奔波，思想负担日益加重，最后在贫穷潦倒中病死。[9]

焦循收到了李锐的第二封信之后，又给李锐写了信，他们之间二十多年的交往就这样继续了下去，双方你来我往，不断地进行交流。焦循的信于五月初二日到达李锐手中，此信的内容也不详，但五月初十日李锐给焦循的第三封信被记录在《观妙居日记》中，全文如下：

愚弟期李锐顿首：启理堂仁兄足下，初二日接到尊札暨大作二篇，悉心展读，不胜敬服之至。"句股测圆篇"谓：容圆半径与句较偕容圆半径与股较相乘之积，与勾股全积等，亦与容圆半径与弦和偕容圆半径相乘之积等。于栾城本法之外，更申一说，足徵精思结撰，非略涉九九者所能窥也。惟解借根方数行于鄙意有未慊然，今录梅总宪元法，稍加注释，写具别纸呈教。按借根方西人名为东来法，梅总宪谓即古立天元一是也。锐尝推而论之，元郭守敬求周天矢度，用开带从三乘方，立天元一法也；西人求每弧通弦，用诸等边割圆，借根方法也。借根方即立天元一，则有天元一而后有借根方，有借根方而后有八线表，有八线表而后有弧三角法，有弧三角法而后测验密，测验密而后推步精。然则西法之超越前代，实吾中土有以资之。特自明以来此失之而彼得之耳。凡九章所能御者，借根方尽能御之，九章所不能御者，借根方独能御之。梅徵君称算法莫精于方程，锐谓借根方非方程所能及，国朝算学名家，梅总宪而外未见有深明此术者，以故其学犹未大显。《数学九章》、《测圆海镜》、《益古演段》三书皆发明立天元一者，前书故举是为问。书札云，欲言之阮侍郎，将此数书或刻或抄，此莫大之功也。锐日夕望之。来书殷勤奖誉太过，非所敢当，然知我如足下，锐亦何可自外？故竭鄙诚以效一得之献。足下倘宥其愚妄而教之，则幸矣。节序将暑，惟珍重不宣，锐再拜。[10]

从李锐这封信中，可以获得焦循致李锐的第二封信中的一些信息。焦循随信给李锐寄去了他的著作，并提出了一个设想，将建议阮元主持刊刻或抄写部分宋元数学书籍。李锐对这个提议十分赞同，认为"此莫大功也"。同时，焦氏对李氏的评价亦很高，因此李锐在信中说："来书殷勤奖誉太过，非所敢当。然知我如足下，锐亦何可自外？故竭鄙诚以效一得之献。"

焦循寄给李锐的"大作二篇"究系何书？现在难以确定。但肯定是两种数学书稿，其中一篇与后来的《加减乘除释》有关，或许就是它的初稿，另一种是讲述天元术的。这可以从李锐的信得到印证。李锐在信中主要讨论了两个问题，第一个就是对焦循所述的一个公式表示赞同，并且做了很高的评价。这个公式讨论勾股形的三边（即勾 a、股 b、弦 c）与其内容圆半径 r 的关系，它可表示为

$$(a-r)(b-r)=\frac{1}{2}ab=(c+r)r$$

此结论载在《加减乘除释》卷三之中。第二，李锐讨论了天元术和借根方，首先他指出，焦氏对借根方法的解释与他的理解不尽相同，"有未慊然"，于是他又抄录了梅瑴成的有关论述，并加上了自己的注解供焦氏参考。其次，他讨论了借根方法与天元术的关系，重复了"西学中源"的观点，并煞费苦心地做了大段推论。最后，他认为天元术的精神实质还没有被人们完全领会，因此有深入研究的必要。

以上是焦、李之间的前几封信的情况，特别是李锐致焦循的信，全部流传至今，其过程与背景也十分清晰。刊本《释椭》前有李锐致焦循的一封信，从内容和时间上分析，这是李

锐给焦循写的第四封信，今摘录如下：

十月初九日李锐启：比来连接手书共三通，并大作《释椭》一本，悉心展读，见所述图说，俱极简当明白，真不朽之盛业也。偶有一二献疑，已别签出，今一并奉上，即希照入。其签语有未当，还望教正。过吴时务示一音，阮阁学命校《测圆海镜》，大约正月间可校毕。得读秘书，惠由足下，感谢，感谢！

此信未注明年代，可以肯定写于嘉庆元年。因此时李锐正在校《测圆海镜》，并说“大约正月间可校毕”，这里“正月”即指嘉庆二年正月，是年三月二十九日他写了《测圆海镜》跋，说明校正经过。阮元曾说：“（焦）君在元署中得《益古演段》、《测圆海镜》二书，急寄尚之，尚之为之疏通证明。”[11]又说：“元视学浙江，从文澜阁《四库全书》中抄得（《测圆海镜》）一本，宁波教授丁君小雅杰又以所藏旧本见赠，但通之者鲜。细草多伪，因属元和李君尚之锐算校一过。……元知学友中，惟尚之独能明之，其精通妙语，即今之敬斋（李冶）也。”[12]可见当李锐向焦循借书时，焦氏是十分重视的。另外阮元让李锐校《测圆海镜》或许也与焦循有关。焦、阮二人自幼过从甚密，且是亲戚关系，焦既建议阮元刊印或抄录宋元书籍，那么推荐他所敬服的李锐进行校核，也是十分自然的。李锐在信中说：“得读秘书，惠由足下，感谢，感谢！”乃肺腑之言也。

嘉庆元年九月初一日焦循《释椭》定稿，立刻寄李锐徵询意见，李锐提出了自己的看法，这就是此信的由来。信中提到“比来连接手书共三通”，可见这时他们的交流已相当频繁，共同的志趣使他们有许多共同的语言，需要讨论的问题也日渐增多。

以上资料表明，焦、李二氏从嘉庆元年初开始有书信往来，以后往复讨论颇多，鸿雁频传，十分活跃，此实为清代中期数学史上一段佳话。另外，焦氏《雕菰楼集》卷十四中录有“答李尚之书”二篇，时间较晚一些，此亦系焦、李间书信之遗文，今一并介绍如下：

答李尚之书一

四月二十四日接得尊札一通，《测圆海镜》一部。循于李仁卿学士之书学之五年，粗知其用，去冬腊月方得吾兄所校本，读精细兄正旧校之误。第十四问下总括算法，有益后学，与栾城之书并垂千古，夫又何疑！兄谓相消为近方程直除，与借根用加减异，真精确不刊。乃循尝细推之，天元一之相减与方程直除亦微有不同。何也？方程两色各备和较，故可以异加，亦可以同加，和较备则消息相通也。天元一本消之前，有和而较不备，或有较而和不备，其寄数、又数两列，不啻盈不足之有出率、有差数，故止可异加，必不可同加，亦如盈不足之必用同减异加也。及既相消，合而为一，其和较始备，和在幂则天元为益从，和在元则幂为益隅。以正负别之，正与正、负与负为同名，正与负为异名。从与积同名相加有益积，秦道古谓之“投胎”，从与积异名相消有翻积，秦道古谓之“换骨”。而核之和在隅乃有益积，和在从乃有翻积。和在隅，益从大于初商，则益积，初商大于益从，则不益积；和在从，较数小于初商，则翻积，初商小于较数，则不翻积。是为少广之变境，又非方程所能尽也。至于寄分之以乘代除，《九章算术》中已有之，一为“七人买马”，一为“太仓之返”，或豫乘以省后之除，或彼乘以代此之除，其义一也。歙县汪孝婴能精思冥索，往往得未曾有，秋间省中当相聚，此复不备。

答李尚之书二

去年四月一晤，满拟午节后入城，可以磐桓数日。不意老母一病，卧床二百日，至

于十月遂遭大故。中间虽入城两次，皆是朝发暮返。方寸既乱，朋友之谊遂疏，聚散分合信亦有命，可慨可哭！今岁晤袁寿阶，知吾兄为元和、吴县两明府所延馆毂，较上年转善，甚为兄喜。又可信人生得失全不关乎荣谋，钩致之力于此，益可长气节，厉廉隅耳。弟连年被水，田园悉没，不得已挈徒于城，为糊口计。景况殊恶，不堪道也。孝婴之馆地去弟甚近，春夏之交，信来最密，然以其居停礼貌，少衰。六月间，毅然而去，今则铁制府召去量海口，赴海曲矣。弟终日孤坐，颇伤离索，中夜不寐。每思得吾兄与孝婴争辩一室，而弟从旁评论之，不可得也。我辈无益于世，国计民生何事可信？惟是此孜孜半生者，庶几成就，俾心神血气不致散铁而不合，则可矣。来札言，余暇可以著书，此犹为兄可喜者也。《扬州图经》一事，看来未易得成，即成亦未易佳，弟虽滥竽其中，亦碌碌因人而已。吾乡杨都尉竹庐先生，博雅君子也，素精乐律，迩来学九章弧矢之术，于弧三角颇有所得。久慕吾兄，愿一结纳。今之吴兴与苏，索弟一札，为方兄之媒，兄不可交臂失之也。

这两封信一者讨论学术，一者系日常书信，兼有介绍他人与李结交的作用。其中前一信大概写于嘉庆四年或五年的夏天。信中有"循于李仁卿学士之书学之五年"一语，说明此时距焦氏始见李冶的著作已有四、五年了。那么焦循是何时获读李冶著作的？嘉庆八年他自忆说："岁乙卯冬，予在浙始得《益古演段》、《测圆海镜》两书，急寄尚之，尚之甚喜，为之疏通证明。"[13]岁乙卯即乾隆六十年。这里有个矛盾，乙卯之时焦李尚无联系，何言"急寄尚之"？根据前面已经提到的资料，知焦寄给李锐此二书应在嘉庆元年岁丙辰。焦循所说"岁乙卯"是否有误，当考。另外，信中又有"四月二十四日接得尊扎一通，《测圆海镜》一部"，以及"去冬腊月方得见吾兄所校本"等语。李锐校勘的《海镜》于 1798 年出版，李锐不会拖很久才寄给焦循，如果焦氏此信写于嘉庆五年，则距《海镜》刊出已一年半以上。综合两方面的信息，知此信应是 1799 或 1800 年所写。

这封信说明李锐在此前给焦氏寄去了《海镜》，并在信中微询焦氏的意见。焦氏明确表示了两点：第一，对李锐的校勘表示高度赞扬，他写道："第十四问下总括算法，有益后学。与栾城之书并垂千古，夫又何疑！兄谓相消为近方程直除，与借根用加减异，真精确不刊。"李锐在《海镜》卷二"正率"一十四问的最后一题下写了两大段案语，前一段即是所谓"总括算法"，总结了天元术中的基本问题，如布算、列式、正负表示及运算规则等等，这对于理解和掌握天元术很有益处。后一段案语讨论了"相消"的意义，并比较了天元术与借根方法的异同，特别是对天元术的相消与借根方的加减做了详细的讨论。他认为："相消"就是相减，与"方程"中的"直除"同意，但焦循不同意这一点，这就是焦氏此信的第二项内容。焦氏认为，"天元一之相减与方程直除亦微有不同"，并讨论了高次方程的系数的符号与所谓"益积"、"翻积"等开方过程的关系。《天元一释》卷下的有关论述，与此处观点相同。

焦循的"答李尚之书二"写于嘉庆十一年（1806）十月初。查李锐日记知是年八月初三日他给焦循写过一封信。又十月十八日记："扬州杨竹庐都尉大壮来谈。接里堂、郑堂两信。"此处所说焦里堂的信即我们这里所引的"答李尚之书二"。此信是应杨大壮之请写的。杨氏对李锐十分敬慕，乘一个便利机会请焦氏介绍他们会面。焦氏在信中介绍了杨大壮的情况，并希望李锐不要失之交臂。

焦氏此信介绍了他自己一年多来的情况和境遇：老母病逝，心情沉重，精神不佳，又连

年蹇贫，不得已以教书谋生。他还提到了汪莱的情况以及他们之间的一段愉快交往。后来汪莱已经离开，应聘“量海口”去了。因精神不佳，情绪低落，经常入夜难寐，不时想起他和汪、李之间切磋讨论的旧景，仍十分留恋。同时，他也为李锐的处境的好转表示十分高兴。五天之后，李锐又写了复信，但此信没有流传下来。

以上我们介绍了焦、李之间的几封信函，虽然仅是只鳞片爪，但反映了他们之间二十多年交往中的几个片断，特别是展示了他们初相结交时的情景，从此可以窥见焦、李之间学术交流之一斑。

## 参考文献

〔1〕焦循：“上钱辛楣少詹事论七政诸轮书”，《雕菰楼集》卷十四。
〔2〕焦循：《释轮》卷上，《里堂学算记》本。
〔3〕阮元：“李氏遗书纪略”，《李氏遗书》本。
〔4〕罗士琳：“李锐传”，《续畴人传》卷五十。
〔5〕李锐：《观妙居日记》，抄本，“嘉庆元年二月廿三日”条。又见《释轮》，《焦氏遗书》本。
〔6〕罗士琳：“焦循传”，《续畴人传》卷五十一。
〔7〕见《释轮》书首。
〔8〕李锐：《观妙居日记》，抄本，“嘉庆元年三月廿五日”条。
〔9〕郭世荣：“李锐《观妙居日记》研究”，《文献》，(2) 1986，书目文献出版社，259—274。
〔10〕同〔8〕。“嘉庆元年五月初十日”条。
〔11〕阮元：“扬州通儒焦君传”，载《雕菰楼集》。
〔12〕阮元：“重刻测圆海镜细草序”，《知不足斋丛书》本。
〔13〕焦循：“衡斋算学序”，《雕菰楼集》卷十五，又见《衡斋算学》第六册。

# 与欧拉数相匹配的特殊函数—戴煦数*

罗见今
（内蒙古师范大学科学史研究所）

戴煦（1805—1860）在《外切密率》[1]（1852）第一、第二卷中独立提出了欧拉数（Euler numbers）$E_n$ 与本文所称的戴煦数 $D_n$ 的递归定义，并正确算到

$D_8=1903757312$　　　$E_7=199360981$

$D_9=209865342976$　　$E_8=19391512145$

$D_{10}=29088885112832$　　$E_9=2404879675441$

论文[2][3]已证明戴煦的定义和方法等价于如下的递推公式（$D_1=1,E_0=1$）

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n-1}{2k-1}D_k=1,\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}E_k=0\ (n\geqslant 1)$$

戴煦把 $D_n$ 和 $E_n$ 相提并论，定义相似，互为补充，原著中全部论述和全部结果都保持着两者间的"相似"性与"对称"性，这与现代数学中将欧拉数同伯努利数（Bernoulli numbers）相提并论的作法是不一样的。

在现今的数学没有给于 $D_n$ 以适当的注意的情况下，《外切密率》的方法对我们似乎仍然具有启示的意义：戴煦思想的价值在于，它强调 $D_n$ 与 $E_n$ 相匹配、$D_n$ 是堪足与 $E_n$ 相媲美的、同类的函数，因而暗示在其他方面，也会保持这种相似性、对称性。这种来自中国哲学背景和数学传统的启示，能不能作为现今数学的研究对象，会不会给现今数学增添什么新的内容呢？我们来作一次尝试。在下文中，将给戴煦数一个新定义，并论证它与欧拉数一样，都是特殊函数。

戴煦数 $D_n$ 是一种特殊函数（special functions），或者叫高等超越函数（higher transcendental functions），它同欧拉多项式（Euler polynomial）$E_n(x)$、欧拉数、伯努利多项式（Bernoulli polynomial）$B_n(x)$、伯努利数 $B_n$ 之间，都可以建立密切的关系。本文将给出有关公式，用（）编号，并对主要结果于以证明。所引用的公式以〈〉编号，主要依据文献[4]～[7]。

$B_n(x),B_n,E_n(x),E_n$ 这几个著名的特殊函数的定义见之于数学辞典及有关著作，下文将多次援引，故先分列于下：

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)z^n/n!\quad(|z|<2\pi)\tag*{〈1〉}$$

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n z^n/n!\quad(|z|<2\pi)\tag*{〈2〉}$$

* 第四届中国科学史国际会议论文部分，1986年5月，澳大利亚悉尼大学。

$$\frac{2e^{xz}}{e^z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)z^n/n! \quad (|z|<\pi) \tag{3}$$

$$sechz=\frac{2e^z}{e^{2z}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_nz^n/n! \quad (|z|<\frac{\pi}{2}) \tag{4}$$

戴熙数 $D_n$ 由下式定义：

$$tghz=\frac{e^{2z-1}}{e^{2z+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}D_nz^n/n!(|z|<\frac{\pi}{2}) \tag{5}$$

$B_n$、$E_n$、$D_n$ 当 $0\leqslant n\leqslant 10$ 的数表如下($D_n$ 的递推式见下文式(41)′)：

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_n$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{1}{42}$ | 0 | $-\frac{1}{30}$ | 0 | $\frac{5}{66}$ |
| $E_n$ | 1 | 0 | −1 | 0 | 5 | 0 | −61 | 0 | 1385 | 0 | −50521 |
| $D_n$ | 0 | 1 | 0 | −2 | 0 | 16 | 0 | −272 | 0 | 7936 | 0 |

表 1. $B_n$,$E_n$,$D_n$ 的第一类记法(＊)

表 1 的记法称为第一类记法，用(＊)号标明。表 2 的记法称为第二类记法，用(＊＊)标明，是通常使用的记法，若取第一类记法的绝对值，可称第三类记法，本文偶尔采用。需要说明的是，对于同一性质，由于记法不同，所得公式因而有异，故有必要予以区别。记法混淆，可能造成公式内的矛盾。①

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $B_n$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{5}{66}$ |
| $E_n$ | 1 | 5 | 61 | 1385 | 50521 |
| $D_n$ | 1 | 2 | 16 | 272 | 7936 |

表 2. $B_n$,$E_n$,$D_n$ 的第二类记法(＊＊)

$D_n$ 可由欧拉多项式 $E_n(x)$ 导出。已知由(3)(4)

$$E_n=2^nE_n(\frac{1}{2}) \text{ (n 为偶数时，}E_n\text{ 非零)} \tag{6}$$

类似地，

$$D_n=2^nE_n(1) \text{(n 为奇数时 }D_n\text{ 非零)} \quad (＊) \tag{7}$$

证明：由(5)，

① 注：例如文献[7]P.1035，$sechx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_n}{n!}x^n$，三类记法此式均不成立。该辞典取本文所称的第三类记法，应将式中$(-1)^n$换为$i^n$，否则它所定义的是 secx 而非 sechx。

$$\frac{e^z-1}{e^z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{2^n}z^n/n! \quad (*) \tag{8}$$

由(3)，分别取 $x=1$ 及 $x=0$，

$$\frac{e^z}{e^z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(1)}{2}z^n/n!$$

$$\frac{1}{e^z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(0)}{2}z^n/n!$$

注意到

$$E_n(1-x)=(-1)^nE_n(x) \tag{9}$$

取 $x=1$，$n$ 为奇数时有 $E_n(0)=-E_n(1)$，故

$$\frac{e^z-1}{e^z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{E_n(1)}{2}-\frac{E_n(0)}{2}\right)z^n/n!=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(1)z^n/n!$$

与(8)式比较展开式系数，即得(7)式。

$D_n$ 和 $E_n$ 孪生于欧拉多项式，两者之间必然有内在的密切联系。今将式(4)、(5)分别平方，式左相加得

$$tgh^2z+sech^2z=1,$$

式右亦有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}D_nz^n/n!\right)^2+\left(\sum_{n=0}^{\infty}E_nz^n/n!\right)^2=1$$

据柯西(Cauchy)幂级数乘法规则，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}(D_kD_{n-k}+E_kE_{n-k})=0 \quad (*) \tag{10}$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_kD_{n-k}=-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_kE_{n-k}$$

进而可以得到

$$D_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_kE_{n-k}(n\geqslant 0) \quad (*) \tag{11}$$

$$-D_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_kD_{n-k}(n\geqslant 1) \quad (*) \tag{12}$$

两式表明戴煦数可由它本身较小的数和欧拉数递推出来。

事实上，欧拉数和戴煦数间还存在着互求关系，用第二类记法，可表为：

$$\left.\begin{aligned}E_n&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n}{2k-1}D_k+(-1)^n, & (**) \quad (13)\\ D_n&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n-1}{2k-1}E_k & (**) \quad (14)\end{aligned}\right\}$$

这一组互反公式属于广义谋比乌斯反演(Mobius inversion)，是组合数学计数理论研究的课题。(11)—(14)式的证明此略。

我们将继续 $D_n$ 同 $E_n$ 的比较。先通过 $E_n(x)$ 建立 $D_n$ 同 $B_n(x)$ 的关系式。(1)式对 $x$ 微分，并

比较系数，得[5]

$$B'_n(x)=nB_{n-1}(x)$$

另外，

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}(n\geqslant 2) \tag{15}$$

故知

$$\int_{x_1}^{x_2}B_{n-1}(t)dt=\frac{1}{n}[B_n(x_2)-B_n(x_1)]$$

由(1)、(3)知

$$E_{n-1}(x)=\frac{2^n}{n}[B_n(\frac{x+1}{2})-B_n(\frac{x}{2})] \tag{16}$$

以上结果已为人们所熟知，今取 $x_1=\frac{x}{2},x_2=\frac{x+1}{2}$，则

$$E_{n-1}(x)=2^n\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+1}{2}}B_{n-1}(t)dt,$$

即

$$E_n(x)=2^{n+1}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+1}{2}}B_n(t)dt \qquad (*) \tag{17}$$

分别取 $x=0,1,\frac{1}{2}$，由(7)(6)，并将积分变量 t 换写为 $x$，得

$$D_n=2^{2n+1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}B_n(x)dx, \qquad (*) \tag{18}$$

$$-D_n=2^{2n+1}\int_{0}^{\frac{1}{2}}B_n(x)dx, \qquad (*) \tag{19}$$

$$E_n=2^{2n+1}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}B_n(x)dx, \qquad (*) \tag{20}$$

将积分值为零者舍去，则可写成

$$D_{2n-1}=2^{4n-1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}B_{2n-1}(x)dx,(n\geqslant 1) \qquad (*) \tag{18$'$}$$

$$E_{2n}=2^{4n+1}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}B_{2n}(x)dx,(n\geqslant 0) \qquad (*) \tag{20$'$}$$

(17)式将欧拉多项式表为伯努利多项式的定积分，是两者间的基本关系式。而 $D_n$ 和 $E_n$ 是由它派生的两个特例。

既然 $D_n$ 同贝努利多项式有(18)的关系，很自然地会联想到，戴煦数 $D_n$ 同伯努利数 $B_n$ 之间关系如何？

由(15)可得 $B_n(x)$ 的乘法公式

$$B_n(mx)=m^{n-1}\sum_{r=0}^{m-1}B_n(x+\frac{r}{m}).$$

取 $x=0$，

$$\sum_{s=1}^{m-1}B_n(\frac{s}{m})=-(1-\frac{1}{m^{n-1}})B_n$$

取 m＝2，[4]

$$B_n(\frac{1}{2}) = -(1-\frac{1}{2^{n-1}})B_n,$$

将 n 换写为 2n,

$$B_{2n}(\frac{1}{2})/B_{2n} = 2^{1-2n}-1. \qquad (21)$$

将(16)式中之 n 换为 2n,并取 $x=1$,得

$$E_{2n-1}(1) = \frac{2^{2n}}{2n}[B_{2n}(1) - B_{2n}(\frac{1}{2})]$$

注意到 $B_{2n}(1)=B_{2n}(0)=B_{2n}$,将(21)式代入上式,得

$$E_{2n-1}(1)/B_{2n} = \frac{2^{2n}-1}{n}. \quad (n \geqslant 1) \qquad (22)$$

两边同乘 $2^{2n-1}B_{2n}$,由(7)知

$$D_{2n-1} = 2^{2n-1}E_{2n-1}(1) = \frac{(2^{2n}-1)(2^{2n-1})}{n}B_{2n},$$

即

$$D_{2n-1} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n} \qquad (*) \qquad (23)$$

或

$$D_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_n \qquad (**) \qquad (23)'$$

这就是 $D_n$ 同 $B_n$ 的基本关系式,它说明 $D_n$ 是 $B_n$ 的"放大",事实上,人们已知[6]

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{2n-1}{2k-1}E_{n-k} \qquad (**) \qquad (24)$$

即

$$D_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{2n-1}{2k-1}E_{n-k} \qquad (**) \qquad (25)$$

它与(14)形式稍别,而结果相合,可谓异曲同工。不过,以前没有将$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_n$看作是一个可以独立的特殊函数。

"放大系数"$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}$可径由两多项式(1)、(3)中算出,由(22),

$$\frac{nE_{2n-1}(1)}{B_{2n}} = \frac{B_{2n}-B_{2n}(\frac{1}{2})}{B_{2n}+B_{2n}(\frac{1}{2})} = 2^{2n}-1,$$

两边同乘

$$\frac{E_{2n-1}(1)}{B_{2n}-B_{2n}(\frac{1}{2})} = \frac{2^{2n}}{2n} \qquad (26)$$

即得

$$\frac{E_{2n-1}(1)}{B_{2n}+B_{2n}(\frac{1}{2})} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} \qquad (27)$$

利用(23)′式、可将在一些无穷级数中出现的 $B_n$ 换成 $D_n$ 而使公式简化，以《Peirce 积分表》所列公式[6]为例(原文 $B_{2n-1}$ 为上述第三类记法)：

$$tgx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$$

$$- \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots\cdots(|x| < \frac{\pi}{2}) \qquad (28)$$

$$ctgx = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \cdots$$

$$- \frac{(2x)^{2n}}{x(2n)!}B_{2n-1} - \cdots\cdots(|x| < \pi) \qquad (29)$$

$$logsinx = logx - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 - \cdots$$

$$- \frac{2^{2n}-1}{n(2n)!}B_{2n-1}x^{2n} - \cdots\cdots(|x| < \pi) \qquad (30)$$

$$logcosx = - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 - \frac{17}{2520}x^8 - \cdots$$

$$- \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n(2n)!}B_{2n-1}x^{2n} - \cdots\cdots(|x| < \pi) \qquad (31)$$

$$tghx = (2^2-1)2^2B_1x/2! - (2^4-1)2^4B_3x^3/4! + \cdots$$

$$= \sum[(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n-1}x^{2n-1}/(2n)!](|x| < \frac{\pi}{2}) \qquad (32)$$

使用戴煦数 $D_n$ 后，这些公式变为(第二类记法)：

$$tgx = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x^{2n-1}/(2n-1)! \quad (**) \qquad (28)$$

$$ctgx = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{2^{2n}-1}x^{2n}/(2n)! \quad (**) \qquad (29)$$

$$logsinx = logx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{2^{2n}-1}x^{2n}/(2n)! \quad (**) \qquad (30)$$

$$logcosx = - \sum_{n=1}^{\infty} D_n x^{2n}/(2n)! \quad (**) \qquad (31)$$

$$tghx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} D_n x^{2n-1}/(2n-1)! \quad (**) \qquad (32)$$

等等，中国清代数学家一般都不把展开式分子与分母约简，相当于保留 $x^n/n!$ 的形式，这从生成函数或形式幂级数(generating function, formal power series)的角度来看，是有道理的。

顺便提及，戴煦在《假数测圆》(1852)中，也得到了可写成(31)的公式，并给出相当于下式的级数：[8]

$$logsecx = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x^{2n}/(2n)! \quad (**) \qquad (33)$$

戴煦数同欧拉数一样也可展开为无穷级数。以下我们将利用已知的结果，沿着将伯努利多项式展开为富里叶级数(Fourier series)的途径求得它。

当 $r=1$，$B_1(x) = x - \frac{1}{2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k\pi}$，$(0<x<1)$

考虑

$$\int_c \frac{e^{xz}dz}{z_r(e^z-1)} \qquad (r>1)$$

积分路径 c 是圆心在原点，半径为(2N+1)π(N 为整数)的圆。被积函数的极点为 $z_k=2\pi ik$(k=0,1,±1,±2,…)，当 k=±1,±2,…时，被积函数的留数(residue)为

$$\frac{e^{2\pi ikx}}{2\pi ik}$$

据留数理论，由(1)知，在 $z=0$ 的留数为 $B_r(x)/r!$，只要 $0\leqslant x\leqslant 1$，在 N→∞时沿大圆周的积分趋于 0，故有

$$B_r(x)/r! = -\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'(2\pi ik)^{-r}e^{2\pi ikx}$$

符号"′"表示略去 k=0 的项，由此得到

$$B_{2n}(x) = (-1)^{n+1}2(2n)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^{2n}}。$$

由 $B_n(1)=B_n(0)=B_n(n\neq 1)$，令 $x=0$，可得

$$B_{2n} = (-1)^{n+1}2(2n)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi k)^{2n}}。$$

改用第二类记法(* *)：

$$B_n = 2(2n)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi k)^{2n}} = \frac{2(2n)!}{2^{2n}\pi^{2n}}\zeta(2n),$$

式中黎曼 ζ 函数(Rieman zeta function)有

$$\zeta(\beta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}} = \frac{2^{\beta}}{2^{\beta}-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{\beta}} \quad (\text{实数 } \beta>0)$$

取 β=2n，则

$$B_n = \frac{2(2n)!}{2^{2n}\pi^{2n}}\cdot\frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{2n}}$$

$$= \frac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{2n}} \qquad (* *) \qquad (34)$$

于是

$$D_n = \frac{2^{2n}(2n)!}{n\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots\cdots\right) \qquad (* *) \qquad (35)$$

已知

$$E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left(1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\cdots\cdots\right) \qquad (* *) \qquad (36)$$

两式相比，平分秋色。观察它们的结构，立即联想到

$$\frac{D_n}{E_n} = \frac{\pi}{4n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n}}\right]/\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}\right]$$

今设后两收敛级数之比为 λ，则在有限项内，例如 n≤6 时

$$1<\lambda<\frac{1+3^{-2n}}{1-3^{-2n-1}} = 1+\frac{4}{3^{2n+1}-1} = 1.00000025$$

故在 n 不太大时，有近似公式

$$\frac{D_n}{E_n}=\frac{\pi}{4n} \qquad (**) \qquad (37)$$

当 n≤6 时

$$D_n=[\pi E_n/4n]+1 \qquad (**) \qquad (38)$$

[α]为高斯(Gauss)记号，表不超过 α 的最大整数。对常用的几个 $D_n$ 之值，用(38)式从已知的 $E_n$ 来求较为方便。

同欧拉数一样，戴煦数也可以表成多种复杂的积分形式，都是通过(23)式而得到的，这里只列一例，旨在将 $D_n$ 与 $E_n$ 进行对比。已知

$$2\Gamma(\beta)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{\beta}}=\int_0^{\infty}x^{\beta-1}\operatorname{csch}x\,dx(\text{实数 }\beta>0)$$

式中 Γ(β)为 Γ 函数(gamma function)。当取 β=2n，有

$$2\Gamma(2n)=2(2n-1)!=(2n)!/n,$$

而由(34)，

$$B_n=\frac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{2n}}$$

$$=\frac{2n}{2^{2n}-1}\int_0^{\infty}x^{2n-1}\operatorname{csch}\pi x\,dx$$

于是有

$$D_n=2^{2n}\int_0^{\infty}x^{2n-1}\operatorname{csch}\pi x\,dx,(n\geqslant 1) \qquad (**) \qquad (39)$$

相仿地

$$E_n=2^{2n+1}\int_0^{\infty}x^{2n}\operatorname{sech}\pi x\,dx(n\geqslant 0) \qquad (**) \qquad (40)$$

式中 $E_0=1$。两式奇偶骈立，“对仗工整”。还可以列出类似的关系，此不一一。

回到本文开始据戴煦的定义所得到的递归公式：

$$D_1=1,\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{2n-1}{2k-1}D_k=1,(n\geqslant 1) \qquad (**) \qquad (41)$$

$$E_0=1,\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{2n}{2k}E_k=0,(n\geqslant 1) \qquad (**) \qquad (42)$$

如果改用第一类记法，则有

$$D_1=1,\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}D_{2k-1}=1,(n\geqslant 1) \qquad (*) \qquad (41)'$$

$$E_0=1,\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k}=0,(n\geqslant 1) \qquad (*) \qquad (42)'$$

(41)′可据戴煦数的定义式(5)直接得出。由

$$\sinh z=\operatorname{tgh}z\cosh z$$

等式两边分别展开成幂级数，据柯西的乘法规则，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^{2n-1}/(2n-1)!=\sum_{r=1}^{\infty}D_{2r-1}z^{2r-1}/(2r-1)!\sum_{s=0}^{\infty}z^{2s}/(2s)!$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}D_{2k-1}\right]z^{2n-1}/(2n-1)!$$

比较等式两边系数即得(41)′式。而欧拉数的递推公式(42)′则是由

$$\mathrm{sech}z\cosh z=1$$

用相仿的方法得到的。

总之，由上述公式形式和证明过程的对比中，我们论证了 $D_n$ 和 $E_n$ 在本质上既统一又相对，它们互为补充，相辅相成，在数学意义上互为余函数。戴煦数和欧拉数都是脱胎于伯努利多项式和欧拉多项式的"孪生"函数，从而证明了戴煦数作为特殊函数的地位。

## 参考文献


〔1〕戴煦：《外切密率》(1852)《粤雅堂丛书》本。

〔2〕罗见今："戴煦数"，《内蒙古师大学报》(自然科学版)，2(1987)，18—22。

〔3〕郭世荣、罗见今："戴煦对欧拉数的研究"，《自然科学史研究》，3(1987)，245—254。

〔4〕王竹溪、郭敦仁：《特殊函数概论》，科学出版社，1979，1—52。

〔5〕Staff of the Bateman Manuscript Project, Higher Transcedental Functions Vol. 1. Director: Arthur Erdelyi, McGraw—Hill Book Co. Inc. ,(1953). 中译本《高级超越函数》1959，上海科学技术出版社，第一册，34—47。

〔6〕徐桂芳编译：《Peirce 积分表》1957，科学技术出版社。

〔7〕日本数学会编集，《岩波数学辞典》1968，岩波书店。中译本《数学百科辞典》，1984，科学出版社。

〔8〕李兆华："戴煦关于二项式和对数展开式的研究"，《中国数学史论文集》(一)，1985，山东教育出版社，98—108。

# 有关李善兰的一些新史料

李 迪
（内蒙古师范大学科学史研究所）

李善兰（1811—1882）是我国清代后期最著名的数学家，他在数学方面的研究工作早已引起国内外学术界的注意。早期有李俨[1]、章用[2]的研究、五十年代有严敦杰[3]、匈牙利数学家 Turan Paul[4]、梅荣照[5]等人的工作。进入八十年代则形成了一股研究李善兰的小高潮，先后有罗见今[6-8]、李迪[9-10]、王渝生[11,12]、傅庭芳[13,14]、李兆华[15,16]、李文林和袁向东[17]、以及法国的马若安（Jean—Claude Martzloff）[18,19]等发表许多论文。这里列举的仅是一部分，在一些有关著作中也往往包括李善兰的研究成果。可以说对李善兰的研究，不论是他的科学工作，还是他的生平事迹都取得了丰富的成果。尽管如此，有关这位数学家的资料并未挖掘干净，近年来仍不断发现。《听雪轩诗存》和《则古昔斋文钞》就是李善兰的两部作品，当然都是他人收集整理而成的，但并未把他的诗、文收集齐备。而这两部抄本诗、文集本身也是近一二十年才引起人们注意的。本文仅就笔者近来所发现的新史料（有些史料还相当重要），整理如下：

## 一 活动与社交史料

李俨在〔1〕中所收资料已很丰富，后来又加补遗[20]、并于1955年收入其文集中[21]。现在所收到的有具体年代乃至日期的资料达一百三十条左右，不仅内容丰富，而且纠正了以前的一些错误。

1．与王韬的关系。王韬（1823—1897）是清代思想家、学者，1849年来上海，在英国教会办的墨海书馆工作，直到1862年。这年闰八月十二日（10月5日）由上海乘船前往香港，十八日（10月11日）到达。后曾去英国译书，又到法、俄考察。1874年，在香港主编《循环日报》。1879年夏初去日本。晚年在上海格致书院任掌院。1852年，李善兰到上海，住大境杰阁。不久，两人相识，往来甚密，这在王韬《蘅华馆日记》有详细记录。但该日记只有咸丰八年正月初一到同治元年十二月初八日（1858年2月14日—1863年1月26日）部分，且中间有断缺，由道光二十九年（1849）到咸丰五年（1855）的日记六册在台湾[22]，其中有三年左右属于他们的交往期。另外，由咸丰六年到七年的两年日记不知是否尚存，这也是他们交往甚密的两年。

李善兰与王韬的关系保持有六七年，直到王韬去香港为止。在这期间，有时几乎每日见面，或是王到李处，或是李到王处，或是到街上的酒楼互请吃酒，有时还有其他人一起来往。

咸丰八年正月初一，李善兰在王韬家掷骰子以为戏[23]（3）。①

正月初三日，王韬与李善兰谈诗，“壬叔（李善兰）喜学北宋，予则取汉、晚唐。”（3）

八月晦日（10月6日），晚上，王韬与壬叔观天，“见彗尾光态熊然，直扫天市垣、荧惑星入北斗。……又论晦朔弦望之理，壬叔谓：古人多望月以空日，故《尚书》多称哉生明，再生魄，旁死魄而不称朔，盖其时历法未密，而以目见为准。泰西古犹太国亦然。犹太人常登山望月，见月初生即为月之首日，乃吹角或举烽告众。每月或二十九、或三十日，三年置一闰，与中法同。可知古时中外历法亦有不异者。”（18）

十二月二十二日（1859年1月25日），韩应陛（？—1860）访问王韬，并以新到《几何原本》相赠：“云间韩蒙卿（应陛）来访，以所刊《几何原本》相赠，得之如获拱宝。……夜挑灯将此书略展阅一过。”并评价说：“今西士伟烈与海宁李君，不惮其难而续成之，功当不在徐、利② 下。……壬叔谓少于算学，若有天授，精而通之，神而明之，可以探天地造化之秘，是最大学问。”（69）

咸丰九年正月二十日（1859年2月22日），王韬在其日记载了李善兰所著《火器真诀》一书的主要内容：“壬叔近著一书，曰《火器真诀》。讲铳炮铅子之路，皆依抛物线法。见其所著《重学》中，而亦能以平圆通之。……”（80）

正月二十八日（3月2日），“壬叔谓今之士子，贬气节，慕势利，一无实用可裨于世者，皆由时文之弊。赭寇扰攘，于今十载，东南数省，蹂躏极矣。室家亡破，骨肉离散，被其祸之烈者，亦不少矣。为其裹协以去，忍耻苟活而得乘间逃逸者，所在多有矣。而卒未闻一人焉枕戈尝胆，出一奇计，为国家剪灭妖氛，为己身湔雪雠怨，为数千百万生灵拔诸水火，而登诸衽席，皆靡靡焉偷旦夕之安，汲汲焉止为衣食之计。其稍有资者，捐纳出仕，不过剥民以奉己，瘠国以肥身，要结当道，取媚上司，以求升迁，贼至则远遁矣，贼未至则告病或终养矣……”（87）。所谓“赭寇”指英国等侵略者，“赭”是红色，当时人称西方的侵略者为红毛贼，这段话是李善兰对当时中国时弊之抨击，也反对侵略，与《听雪轩诗存》中的某些诗句含义相同。

四月二十四日（5月28日），李善兰在王韬家“将数年中诗钞成一帙，意将付梓，予见之不觉技痒。”（122）这抄成一帙的诗，是否已出版？恐未必。也许是《听雪轩诗存》的前身。

咸丰十年二月朔日（1860年2月22日），王韬在日记中载了李善兰去南汇之事：“壬叔将往南汇顾金圃（祖金）广文。金圃居南汇之二团镇，富有田产，去年曾一游此，与予有杯酒之欢。颇嗜历学，能算日月交食，五星度。著有《庚甲年七政四余考》。欲从壬叔授西法，许为百金刻书。壬叔有此行。夜，煮酒翦灯，与壬叔纵谈一切，宵深始睡。”（136）李善兰此次刻书之打算没有实现，后来才有去金陵找曾国蕃出书之事[24]。其实，他为出书颇费奔波，可能找过多人，王韬于1879年还回忆说：在二十年前，于上海曾与张斯桂见一面，“时张方锐意为西学，欲刻海宁李壬叔天算诸书。”[25]这事显然也没有作成。事情可能是在咸丰十年二月十六日（1860年3月8日）前后，因这是王韬与李善兰几乎形影不离的时候，张斯桂到王韬处拜访，王韬写道：“李壬叔来，同往访龚拱，不值……薄暮，雨下甚大，壬叔乘舆入城。慈

① 以下凡出自《王韬日记》者，不再指出出处，括弧内的数字为页码，下同。

② 中华书局本为“徐、李下”，“李”为“利”之误。

黔人张鲁生（斯桂）来访，与伟烈君购书。鲁生喜西人格致之学，意欲延西士翻译各书，并将慕维廉之所著《地理》下编痛加删改，使寰地之学，厘然大明。亦可谓士流中之矫矫者。”（141）这位张斯桂确实“锐意为西学”，对李善兰这样热心于西学的人他肯定会特别感兴趣，王韬自然给他们介绍会面。李善兰与张斯桂谈话的内容，王韬不会写进自己的日记，也可能在其他地方（包括李善兰住所）研究过刻书问题。不过，王韬清楚知道此事，所以过了差不多二十年仍未忘却，记入书中。

六月十七日（8月3日），李善兰请王韬“往酒垆小饮，浮之大白，醺然而止。”（192）这是目前中华书局本日记涉及到李善兰的最后一条。

2. 与吴子登、华蘅芳等人的关系。李善兰的交往是很广的，他在上海期间和数学家吴子登（嘉善）、华蘅芳（1833—1902）等人有不少来往，很多时候是在王韬家里会面。后来，在金陵也还有时相见，刘岳云同时拜访过他。

李善兰与华蘅芳何时会面，何处会面，不清楚，现在可以肯定地说不迟于咸丰九年二月。这年的二月四日（3月8日），晚上，王韬去管小异处闲谈，“壬叔，若汀亦来合并。”（92）从口气来看，好象是经常见面，但未查到更早的记载。（若汀就是华蘅芳）

第二天，李、华是否再次会面，王韬没有写到，可是写到华蘅芳讲述徐寿（雪村，1818—1884）的情况，也很重要，现摘录于下：

“锡山徐雪村巧慧绝伦，所制新奇之物，可与泰西之人相埒，善铸吕宋银钱，混入真者几不能辨，自鸣钟表及指南针皆极精妙。当登西人火轮，观其轮轴机捩，即知其造法，可谓明敏者矣。”（92）二月九日（3月13日），王韬与管小异、李善兰、华蘅芳入城：“往栖云馆观画影，见桂、花二星使之象皆在焉。画师罗元佑，粤人曾为前任道吴健彰司会计，今从英人得授西法画影，价不甚昂，而眉目明晰，无不酷肖，胜于法李阁郎多矣。”（93）所谓“画影”就是俗语所说的“拉洋片”，可见是在鸦片战争之后不久即从西方传入中国。

不久，吴子登来到上海。咸丰九年三月十三日（1859年4月15日），王韬在管小异住所闲话，“见其案头有和吴子登（嘉善）诗一绝”（107）。十六日（4月18日）吴子登、李善兰都到王韬家里：“吴子登来访，壬叔与之剧谈。子登人甚谦抑，工书画，为壬叔写箑，但于尾署”无声诗“数语，不著一字……”（108）“箑”是扇子，“写箑”就是画扇子面。看来他们谈话很投机，因为吴子登善于绘画，所以给李善兰画扇子面以为纪念，这是他们第一次见面。以后，他们继续接触，四月二十一日（5月23日），王韬写道：“晨，同小异，子登至环马场酒楼小饮。盖小异是日将归，予与壬叔特祖帐钱之也。子登饮量甚豪，酒罄四壶”。（120）

到咸丰十年正月，又有很多人集聚上海，其中有吴子登的两个哥哥子寿、子让以及徐寿等，再加上李善兰和华蘅芳等，是当时科学家的一次有意义的集会，讨论了一些科学问题。正月二十日（2月11日），吴子登和他的两个哥哥到王韬家“观火轮器，轮激行甚疾，有一马之力，织布轧棉，随其所施。”（134）

正月二十四日（2月15日），管小异、华蘅芳、徐寿从无锡到王韬家，“薄暮，共往酒楼小酌”，这时吴子登等也赶来。“雪村、若汀酒量殊豪，已罄五斗。……雪村巧慧绝伦，制器造物，可造西人之室，余识之已数年矣。若汀，名蘅芳，锡山诸生，亦具巧思，能历算，固翩翩佳公子也。丁巳年（1857），曾来沪上，与西人韦廉臣游，适馆三月而去。予时患足疾，将旋闾用，仅于韦君席上一见而已。”（134）这期间，李善兰不在上海，正月三十日从云间回

到上海，李善兰与吴子登保持了较长时间的接触，在太平军进军苏州的时候，他们也常在一起，有时还同去苏州。

李善兰后来去了金陵，吴子登也到了那里，他们那时有何来往不得而知，但肯定是有很多接触，1868年刘岳云（1849—1917）前去拜访他们，他说："余……二十岁至金陵，谒李壬叔先生、吴子登先生，遂得并通代数。……"[26]到李善兰晚年时，他们还有来往，讨论西方科学技术多为中国先儒已经说过的问题，刘岳云为此特别写了一封长信给李善兰[27]。现摘录几段于下：

> "春间侍座，谕以泰西格致之事，蒙谓多中国先儒所已言，先生命条举以对，并询拙著《格物中法大旨》。时匆匆出都，未及陈答。须由吴先生寄到手柬荷赐《算学课艺》一部，且感且谢。谨因暇晷，毛举一二，拉杂成书，祈进而教之。……《格物中法大旨》汇萃各书，以中法分子，且此时所得不过四百余条，约可分三卷。……岳云从事吴先生跃闻稍久，不多亲肄，甚事，故言之详与扪烛扣槃者差异。如先生以为可教，曾盖其所不能，幸甚。《测圆海镜通释》全稿为家叔俛兄寄往朱肯夫先生处，行箧尚有首卷，录呈左右，乞赐览并裁正焉。"*

这封信包括这样几项内容：①某年春天刘岳云到北京拜访李善兰，李给他讲述西方科学技术，刘则认为多数在中国古代都已谈到，李让他举出事例。②李善兰委托吴跃闻给刘岳云捎去书信和《算学课艺》一书。③信中，刘岳云讲述了《格致中法大旨》的基本情况和举出许多事例，说明自己的看法。④刘岳云写有《测圆海镜通释》一稿，希望李善兰能给审阅首卷。

刘岳云的这封信没有留下年月，信中所说的"春间"也就无法确知，但信中说到《算学课艺》一书，该书于光绪六年（1880）由同文馆出版，书前有美国丁韪良（W. A. P. Martin，1827—1916）于该年三月写的序，由此推知，刘岳云在北京拜访李善兰应是1880年春，即《算学课艺》出版之后。又，李善兰去世于1882年冬，刘岳云与他会面自然不会晚于此年。

3. 与艾约瑟、伟烈亚力等西洋人的关系。众所周知，李善兰与这些人关系密切，共同翻译了一批西方科学著作。但是对其他方面的交往则很少了解。现从《王韬日记》中查到了一些记载，提出来供研究者参考。

咸丰八年十一月二十三日（1858年12月27日），李善兰在王韬家中谈到当年同美国的艾约瑟（Joseph Edkins，1823—1905）去杭州的情景："昔年同艾约瑟至杭，乘舆往游天竺，为将军所见，时西人无至杭者，闾阎皆为惊诧。将军特谕仁和县往询，县令希上意，立逐艾君回沪，而将壬叔发回本州。壬叔因献诗州守，曰：'游山不合约波臣，奉谴还乡判牍新。刺史风流公案雅，递回湖上一诗人。'州守见之大喜，立赠以金遣之。"（57）艾约瑟于1848来到中国，在上海传教，李善兰与他同去杭州当在1848年之后。

在上海期间，李善兰与艾约瑟曾合译《照影法》一书，将在本文第二部分详细讨论。

这时，李善兰仍与伟烈亚力（Wylie Alexander，18156—1887）有接触。咸丰九年正月十八日（1859年2月20日），在王韬家"江西甘子和来访，伟烈君与之略设数语，人颇冲和。……夜，壬叔来谈……"（79）伟烈就是伟烈亚力的译音。这天，虽未说李、伟二人见面之事，但

---

* 此条为郭世荣提供，谨致谢意。

他们都是常来常往，见面的机会很多。

咸丰十年正月五日（1860年1月27日），王韬“观伟烈试火轮器。水沸气涌、行转甚速。”（131）所谓“火轮器”就是蒸汽机，李善兰对此很感兴趣，肯定也会到场观看试验。

三月二十九日（5月19日），吴子登、李善兰、伟烈亚力等都到王韬处，然后吴、李去苏州，而伟烈亚力则去了杭州。

4. 与徐有壬的关系。徐有壬（1800—1860）字君青，是当时著名数学家，于咸丰九年正月到苏州任江苏巡抚。王韬说：“闻徐君青先生升任江苏巡抚。君青先生，浙江乌程人，精于历算。于丁巳（1857）四月中曾来沪上，至墨海观印书车，并见慕维廉、韦廉臣二人，皆以洋酒饼饵相饷，请予为介，得与纵谈，为人诚至谦抑，雍容大度，与壬叔为算学交最密。午后，伟烈言英国于各处设立领事，互有移调，……。”（77）

李善兰对徐有壬的数学研究评价很高，他说：“江苏多英俊之士，今君青先生开府吴中，其算学为海内宗师，可于各县书院中别设历算一科，悉心指授，西学不难大明，而绝续可继，此亦千载一时不少失之机也。”（86）李善兰是希望由于有这样一位数学家徐有壬到江苏做高官、由他普及数学教育，培养人才。

咸丰九年四月十二日（1859年5月14日），李善兰与管小异说到自己的前途时：“今君青先生在此，予绝不干求，待其任满时，请其为攒资报捐，得一州县官亦足矣。”（117）

到了咸丰十年春天，太平军逼近常州、苏州，吴子登、李善兰等都很关心徐有壬的命运，并曾给他出谋画策，企图抵抗太平军。有时还亲自跑到苏州，四月六日（5月26日），有人对王韬说，徐有壬命令将苏州“沿城一带房屋焚烧。……啼哭之声，震彻城厢内外；百万货物，悉付一炬，”（168）四月十三日（6月2日）苏州已成一座孤城：“吴门六门皆闭，巡抚下令：毋得纳溃卒。”（173）

李善兰这时如坐针毡，他想请外国在华的侵略军去苏州解围，保住徐有壬。四月十四日（6月3日）清晨，他“乘舆款关”到王韬处，“晶顶貂尾，焕然改观。”并且说：“吾与足下且成此大功！”接着他们有一段对话，可以大体反映出李善兰的思想，现抄录于下：

> “余（王韬）瞿然曰：‘瀚甚矣惫，万不能起，所谓大功者何？’壬叔曰：‘苏城现将被围，徐巡抚欲向西人乞师，以拯数百万生灵于贼手，事若成，真莫大功德。’余曰：‘此事宜与吴观察偕见英公使，弟人微言轻，万不能助一臂，足下怀中可有抚军文移致英、法二公使者乎？’壬叔曰：‘无之。’余曰：‘若然，则事不得谐。盍访孝拱，与之谋言？’时春圃至，曰：‘苏城已陷贼矣。’余惊骇甚，曰：‘何由知之甚速？’曰：‘席华峰遣使至苏，于娄门外见火光烛天，再进，遥望城堞上多树黄旗，往来兵勇皆裹白布于首。俱不敢入而返。’余拍案覆杯，抑天狂叫，病魔顿为退舍。壬叔曰：‘此消息恐未确。昨见吴观察云：苏城有生力军万余，藩库存银九十万，兵饷俱足，尽可坚守。又得民团戮力从事，何患贼为？’壬叔遂往访孝拱，而余竟昏然睡矣。”（173）

第二天，李善兰又到王韬住所，说到他和董孝拱策画借洋兵之事。结果未弄成。

王韬还记载了徐有壬之死的情景：四月十二日（6月1日），“统帅张璧田（玉良）自锡山遁归，以令箭呼城门启，众遂入。入城即于卧龙街左右焚掠，民众奔避，不及扑救。时事起仓猝，民团不能抵御，衢市间尸相枕籍。溃兵即闯入抚军署，抚军被戕，夫人公子投池死，全家七口皆殉难……”（174）根据这段记载，徐有壬是被清军溃卒杀死的，而不是太平军。

5. 与郭嵩焘的关系。郭嵩焘很看重李善兰的学识，亲自拜访，光绪二年正月十四日（1876年2月10日），郭嵩焘“上兵部及总理衙门，英翻译梅辉立，法翻译师克勤及总税务司赫统均来署会谈。同文馆教习丁韪良见示《星轺指掌》译本（第四十九节、五十节尤多见道之言），因相就一谈，兼晤李壬叔。”[28]李善兰还为郭嵩焘出使西欧帮忙，同年三月十五日（4月11日）郭嵩焘写道：“周芋农、李壬叔枉过。壬叔为述威妥玛照会总署：钦差不宜有二人。”[29]这里所说的威妥玛（T. F. Wade，1818—1895）是当时英国驻华公使馆的汉文正使（相当于参赞?），办理去英国的手续当然要经过他，他不同意派二位钦差，此事由李善兰来回传达。

郭嵩焘到国外之后，李善兰还与他有联系，光绪四年三月二十六日（1878年4月30日），他在英国收到李善兰的一封信，“并丁韪良寄《公使便览》三部”[30]。十一月初七日，他又收到李善兰的一封信，信中“告知谢隐庄之子名鹤鸣，字子和”[31]。这也许是郭嵩焘想要知道的。

郭嵩焘在国外有时回忆当年在上海时与李善兰相见，丁卯年（1855）他曾在英华书屋与李善兰、王韬等见过。[32]

李善兰接触过的人很多，有些无关紧要，这里不拟赘列。

## 二、几项作品

我们不仅发现了上述有关李善兰生平事迹的资料，而且发现了他的一些作品，这对研究他的学术思想和学术成就有参考价值。

1. 翻译《照影法》一书。过去从来不知道李善兰有《照影法》之译，但这是千真万确的事。在《王韬日记》中多次提到。为了使读者了解当时照相术的情况，将有关资料一并列下：

王韬在咸丰八年九月十九日（1858年10月25日）写道：“（李）关郎善照影，每人需五金，顷刻可成。（刘）益斋照得一影，眉目毕肖。其法以圆镜极厚者嵌于方匣上，人坐于日光中，将影摄入圆镜，而另以药制玻璃合上，即成一影。其药有百余种，味极酸烈，大约为磺强水之类。……”（23）由此可知，当时上海已有照相师，并作为一种营业。

咸丰十年三月二十日（1860年4月10日），吴子登到王韬处，“清晨，吴子登来访，言拟学《照影法》。其书，壬叔已译其半。照影镜已托艾君（约瑟，字迪谨，英国耶稣会士人，颇诚谨）购得。惟药未能有耳。”（155—156）很显然，《照影法》一书是李善兰与艾约瑟合译的，当时只译出一半，同时还要照书中所述方法装配照相机，还想弄到洗相药。

两三天之后，吴子登又到王韬住所，“同访艾君约瑟，将壬叔所译《照影法》略询疑义。艾君颇肯指授。”（157）

三月二十九日（5月19日），王韬说：“吴子登、李壬叔来，将往吴门，匆匆数语，即偕诣春甫寓斋。春甫学《照影法》，已约略得其半矣。试照余像，模糊不可辨，衣褶眉目皆未了了，想由未入门之故耳。”（166）

看来，当时对照相术感兴趣的大有人在，吴子登也学习过，这时已是太平军东进时，李善兰等的思想转到苏州方面，《照影法》大约没有译完，估计译稿也早已不复存在了。据目前所知，这是我国最早翻译照相术方面的书籍，尽管未译完，也是有意义的。过去只知他翻译有《几何原本》后九卷、《代微积拾级》、《代数学》、《谈天》、《重学》、《植物学》等六种并已出版，还有《奈端数理》未译完，现在在这个目录上应加上《照影法》一种，共为八种。

2. 乘槎笔记序。《乘槎笔记》是斌椿（1804－?）父子率同文馆的凤仪、德彝和彦慧一行五人，由英国人赫德（Sir Robert Hart，1835－1911）组织赴欧洲游历的日记。此次游历，于同治五年正月二十一日（1866年3月6日）离开北京，同年七月初十日（8月19日）离法国回国，十月初七日（11月13日）进入北京。随行人员中的彦慧是唯一的同文馆学生，他是学外语的还是学自然科学的无记载。同治八年（1866）李善兰任同文馆算学教习，彦慧就成了他的学生。当时，同文馆学制长达七八年，彦慧至少后来学过自然科学，在李善兰阅定的《算学课艺》中有他的数学题解答一道[33]。斌椿出版日记《乘槎笔记》时便请李善兰和徐继畬（1794－1873）、杨能格三人写序。李善兰的这篇序过去不为人所知，现录于下：

"地为球体，环日而行，与五星同，故五星皆地球也。日居其位不动，与三垣二十八宿诸恒星同，故诸恒星皆日也。日有若干地球环之，则垣宿诸星，每星亦必有若干地球环之，以近推远，理当然也。此说非西士所创也，大雄氏所云'三千大千世界'，盖即指此已。自周迄今二千余年，自天竺至欧罗巴五万余里，其说若合符节，信有徵矣。然而五星之世界，目能望而见之，身不能往而游之也。至垣宿诸世界，远极而隐，心能臆而定之，目且不能望而见之矣。而吾人所处之地球，所有四大洲，大小数百岛，舟车所通，固不难往而游也。虽然，游必有福。举天下之人，其足有不出一郡者矣，有不出一邑者矣，甚者有终身不出里巷者矣。适百里者宿舂粮，适千里者三月聚粮，又或婚嫁未毕，或民社羁身。茫茫禹迹，能遍历者，有几个哉！又况九洲之处，数万里之遥，隔以大海，浩汗杳冥，巨浪如山，有望洋而叹者矣。即曰不畏风涛，视险若夷；而中外限隔，例禁綦严，苟无使命，虽怀壮志，徒劳梦想耳。故曰：游必有福。郎中斌君友松，少壮宦游，足迹半天下，一旦奉命往欧罗巴访览政教风俗，遂得游数万里之外。所历十余国，皆开辟以来，中国之人从未有至者。各国君臣，无不殷勤延接，宴会无虚日。宫廷园囿，皆特备车骑，令纵驰览。斌君之游福，可谓大矣。于是斌君凡身之所至，目之所见，排日记之。既恭录进呈，又刻以行世，令读其书者，亦若身至之而目见之也。然则斌君非独一人游，率天下之人而共游之也。我闻修普贤行者，能以神通力，遍入大千世界；又闻慧业文人，多自佛门中来。斌君殆华严会中人，昔普贤行（者），今现宰官身者耶？宜其游福之超越寻常万万也。

同治八年冬十月，海宁李善兰序。"[34]

这篇六七百字的文字，多少反映了李善兰的一些思想观点，例如对星宿的看法，对游历世界的向往等，都是研究李善兰有价值的参考材料。

斌椿为什么请李善兰写序？显然是因为他在学术上的影响，并由彦慧从中联系而成的。

3. 一桩有趣的谜案，1984年我和研究生那日苏、孔国平去云南大学图书馆看书，在线装书目中发现《西算心悟》一书，不分卷，目录上著录"李善兰撰"，铅印本1册，无出版年代和出版单位，过去所有研究李善兰的论文中都没有提到此书，于是认定是新发现的书，便借出阅读。书的正页题《西算心悟》，下边有两行字："李善兰壬叔撰，张之洞刊行"，接下去是"同文馆西算心悟"一行，其下一行是"算学心悟小引"，未署名，全文如下：

"天下古今至当不一之理，惟数为最确凿可据。壬叔苦思力索，阅三十年，每有所得辄自札记，第家寒壤僻，不得泛观博览，以扩其闻见，又不得与四方通人交游，相与尝奇析疑讲，去其非而超于是，徒守此一知半解，敝帚自享，殊愧所见之不深矣。"

未记年月，其中虽有"第家寒壤僻"，"又不得与四方通人交游"等语，与李善兰处境有别，但因有"壬叔苦思力索"一语，便定为李兰善所作。

"小引"之后是《同文馆西算心悟》的作者、出版者和校者名单，即

同文馆算学教习李壬叔先生述

南洋大臣张之洞刊行

番禺陈宗颖孝坚，定远何维楷瑞卿

花县汤金铭警盘，和州赵瑞文龙书

花县汤金铸馨颜，凤阳王恩惇义甫

南海陈桀次球，定远何维栋仲敏

同校

书前没有目录，在行文中有12个小标题，它们是：法实两小数一大数、横直斜加减乘数相等、直横加乘相较、四率相当比例、八线中六线相求圆图，八线中六线相求方图，勾股和较杂糅、弧三角用切线分外角解、奇数知总法、日晷法、火镜记、瞳子记、方晖圆影记。

几年中，笔者一直认为这部书是李善兰的著作，几乎是没有产生多大疑问。可是最近偶翻张楚钟《求是斋算学四种》，第二种为《算学心悟》，经仔细阅读，惊奇地发现：和云南大学藏的那本书差不多完全一样，不同之处有：①"算学心悟小引"中"壬叔苦思力索"中之"壬叔"改为"楚钟"，②正文的署名是："定远何廷谦棣珊鉴定，泰和张楚钟石瓠"两行；③最末多一个小标题"江船尖底说"。其余全同。

难道李善兰和张楚钟之间存在着抄袭关系吗？李善兰以其在当时数学界的崇高地位没有必要去抄袭他人的著作，而张之洞（1837—1907）是一位高官，也不会去帮李善兰作伪，反过来说，张楚钟也不是抄袭他人的，他的《求是斋算学四种》出版于同治十二年（1873）。其时李善兰还健在，既使他有抄袭之行为，也不敢公开把"壬叔"改为"楚钟"，而放到自己书中公开刊出。书前何廷谦写的序中说同治九年（1870）张楚钟就完成了《算学心悟》书稿。这都证明《算学心悟》确为张楚钟所作。

两家都不可能抄袭，这就出现了一个谜；云南大学藏的铅印本是怎么来的呢？最大的可能是书商在李善兰死后搞的鬼，以利推销。

## 参考文献

〔1〕李俨："李善兰年谱"，《清华学报》1928年6月，第5卷第1号，第1625—1651页。

〔2〕章用："垛积比类疏证"，《科学》第23卷11期（1939年11月），第647—663页。

〔3〕严敦杰："中算家的素数论"，《数学通报》1954年第4期，第6—10页，第5期，第12—15页。

〔4〕Turan Paul，A Kinai matematika dortenekegy Problémájárál，Matematikai Lapok 5(1954)，P P. 1—6。

〔5〕梅荣照："我国第一本微积分学的译本—《代微积拾级》出版一百周年"，《科学史集刊》第3期，(1960)，第59—64页。

〔6〕罗见今："《垛积比类》内容分析"，《内蒙古师院学报》(自然)，1982年第1期，第89—

105 页。
〔7〕罗见今："李善兰恒等式的导出"，同上 1982 年第 2 期，第 42—51 页。
〔8〕罗见今："李善兰对斯特林数和欧拉数的研究"，《数学研究与评论》第 2 卷第 4 期（1982 年 11 月）。
〔9〕李迪："十九世纪中国数学家李善兰"，《中国科技史料》1982 年第 3 期，第 15—21 页。
〔10〕李迪："试论李善兰的爱国思想"，《光明日报》1983 年 10 月 19 日，第 3 版。
〔11〕王渝生："李善兰的尖锥术"，《自然科学史研究》第 2 卷第 3 期（1983），第 266—288 页。
〔12〕王渝生："李善兰：中国近代科学的先驱"，《自然辩证法通讯》第 5 卷第 5 期（1983），第 59—72 页。
〔13〕傅庭芳："《垛积比类》与垛积差分"，《世界科学》1984 年第 3 期，第 27 页—31 页。
〔14〕傅庭芳："朱世杰与李善兰在垛积术上的成就"，《中国数学史论文集》（二），1986，山东教育出版社，第 84—98 页。
〔15〕李兆华："尖锥术及其与乘方垛关系之探讨"，《辽宁师大学报》（自然），1984 年第 1 期，第 107—116 页。
〔16〕李兆华："李善兰的垛积运算之探讨"，《天津师大学报》"数学专辑"（1985 年 6 月），第 65—78 页。
〔17〕李文林、袁向东："李善兰的尖锥求积术"，同〔14〕，第 99—106 页。
〔18〕J. -C. Martzloff 著，罗见今译："李善兰的有限和公式"，《科学史译丛》1983 年第 2 期第 1—6 页。
〔19〕J. C. Martzloff, Li Shanlan, mathematicien chinois traditionnel, SCLENCE, mensuel N° 127 27F (mai 1988), PP. 48—57。
〔20〕李俨："李善兰年谱补录"，《学艺》17 卷 6 号（1947 年 6 月），第 30—31 页。
〔21〕李俨：《中算史论丛》第四集，1955，科学出版社，第 331—361 页。
〔22〕汤志钧："（王韬日记）前言"，载《王韬日记》卷首，1987，中华书局。（《王韬日记》即《蘅华馆日记》）
〔23〕《王韬日记》，中华书局本，第 3 页。
〔24〕李善兰：《则古昔斋算学·跋》（1867）。
〔25〕王韬：《扶桑游记》。
〔26〕冯书：《开方表》，刘岳云序（1896）。
〔27〕刘岳云：《食旧德斋杂著》中之"答李壬叔先生书"。
〔28〕郭嵩焘：《伦敦与巴黎日记》，《走向世界丛书》本（岳麓书社），第 6 页。
〔29〕同〔28〕，第 9 页。
〔30〕同〔28〕，第 555 页。
〔31〕同〔28〕，第 814 页。
〔32〕同〔28〕，第 966 页。
〔33〕《算学课艺》卷四。
〔34〕斌椿：《乘槎笔记》，李善兰序，《走向世界丛书》本（岳麓书社），第 86—87 页。

# 华蘅芳的有限差分研究*

纪志刚
（徐州师范学院数学系）

华蘅芳（1833—1902），晚清著名数学家，《积较术》（三卷）是他的一部关于有限差分学的重要著作。早期的研究[2][3]，因受囿于"方程论"、"级数论"的观点，未能尽察《积较术》丰蕴的数学内涵。近年来，随着对中国传统数学的程序性、离散性特点的认识，文献[4]、[5]从组合学、有限差分学的角度，探讨了华氏的工作，获得了一些重要成果，开拓了研究方法的新起点。本文在"把历史的研究同现代的发展联系起来"的数学史研究新观点[6]的指导下，对华氏的有限差分研究，从理论上加以全面的探讨和系统的总结，并同现代数学作了相应的比较。

应当指出，由于原著并非符号代数，本文在转述时则本着"严格遵从原著内容，但不拘泥于表达方式"的原则，所得公式仍属华氏原有成果。此外，符号$\binom{m}{n}$、$\binom{m+n-1}{n}$只限于计算过程，决无从若干元素中取出若干的组合意义。

## 一　"积较"的概念和性质

《积较术》卷一"论积较之理"，华氏明确给出如下定义：

"积较者，列各积相较，复列各较相较，复列各较之较相较，必至无较，乃止。"[1]

此处，"积"可指"幂积"

$$y_n = x^n,$$

"诸乘方积"

$$y_n = f(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r},$$

和"垛积"

$$y_n = \frac{1}{n!}x(x+1)\cdots(x+n-1) = \binom{x+n-1}{n}$$

一般地，"积"可用$y_n = f(x)$表示，"较"用作名词作"差"解。"各积相较"即一阶差分$\Delta y_n$，"各较相较"即二阶差分$\Delta^2 y_n$，"各较之较相较"即三阶差分$\Delta^3 y_n$，"必至无较，乃止"即是说，对于一有限差分函数$y_n$，必存在自然数m，使得：

---

* 本文系作者硕士学位论文《华蘅芳的数学工作研究》第三章"华蘅芳的积较术"，发表时又作了修改。值此之际，谨向我的导师李迪教授、罗见今副教授表示最诚挚的敬意。

$$\Delta^m y_n \equiv C, \quad \Delta^{m+1} y_n \equiv 0 \quad (\text{“无较”})。$$

华氏对“积较”给出如下限制条件：

“凡求较之诸积俱为同方，其底边之长率必为相等之数”。即

1. $y_n$ ($n=0$, $\pm 1$, $\pm 2$, …) 的次数相同（“同方”）；

2. 差分间距相等（“长率必为相等之数”）。

这是有限差分学的基本要求。

在卷一和卷二中，华氏归纳得出差分的基本性质如下：

性质 1 “凡较数之次数，恒如其方之指数”。

华氏举例如：“平方之积有二次较数”，且 $\Delta^2(x^2)=2$；“立方之积有三次较数”，且 $\Delta^3(x^3)=6$；一般的，$x^n$ 有 n 次较数，且 $\Delta^n(x^n)=n!$。

性质 2 “诸乘方和较之积，其较数之次数，恒如其最大方之指数”。

即若 $f(x)$ 为 n 次多项式，k 为 $f(x)$ 的差分次数，则 $k=1, 2, \cdots, n$。

性质 3 “同方之各积任若干倍之，则其各较亦大若干倍”。

即
$$\Delta^k(ax^n) = a(\Delta^k x^n) \tag{1}$$

性质 4 “不同方之各积，其积数若相加（减），则其较数亦相加（减）”。

即若 $y_n=f(x)=\sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r}$，则

$$\Delta^k y_n = \sum_{r=0}^{n} a_r \Delta^k x^{n-r} \tag{2}$$

性质 5 “末次较数，各行必相同”

即若 $y_n$ 是 m 阶差分函数，则

$$\Delta^m y_n \equiv C\,(\text{常数}) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3}$$

上述性质，说明了华蘅芳对有限差分的正确认识，这些结论与今之差分理论基本上是一致的。

## 二 华蘅芳差分基本定理

对一般的差分序列 $y_n$ ($n=0$, $\pm 1$, $\pm 2$…)，华氏按如下“较数之例”构造差分表，即

1. “自右向左横列之”；

2. “以右数减左数，书其减余之数于左下”。

注意到“惟因末次之较数各笔必相同”，以及“每以下一数减其上数则得右上之数”，这样就可以得到一幅完整的“积较式”（表一）。

依华氏“较数之例”，可得表一的差分定义式

$$\Delta^{k+1} y_n = \Delta^k y_n - \Delta^k y_{n-1} \quad (\text{n 为整数}) \tag{4}$$

（左下）（左）（右）

定义 (4) 与现在差分定义[7]形式上稍有差别，因此构成华氏差分体系的独有特征，这将反映在以下的公式中。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_n$ | …… | $y_3$ | $y_2$ | $y_1$ | $y_0$ | $y_{-1}$ | $y_{-2}$ | $y_{-3}$ | …… | $y_{-n}$ |
| $\Delta y_n$ | …… | $\Delta y_3$ | $\Delta y_2$ | $\Delta y_1$ | $\Delta y_0$ | $\Delta y_{-1}$ | $\Delta y_{-2}$ | $\Delta y_{-3}$ | …… | $\Delta y_{-n}$ |
| $\Delta^2 y_n$ | …… | $\Delta^2 y_3$ | $\Delta^2 y_2$ | $\Delta^2 y_1$ | $\Delta^2 y_0$ | $\Delta^2 y_{-1}$ | $\Delta^2 y_{-2}$ | $\Delta^2 y_{-3}$ | …… | $\Delta^2 y_{-n}$ |
| $\Delta^3 y_n$ | …… | $\Delta^3 y_3$ | $\Delta^3 y_2$ | $\Delta^3 y_1$ | $\Delta^3 y_0$ | $\Delta^3 y_{-1}$ | $\Delta^3 y_{-2}$ | $\Delta^3 y_{-3}$ | …… | $\Delta^3 y_{-n}$ |
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |
| n | …… | 3 | 2 | 1 | 0 | −1 | −2 | −3 | …… | −n |
| | | | | | （“0边积较”） | | | | | |

表一　华蘅芳的“积较式”

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| … | | $y_3$ | | $y_2$ | | $y_1$ | | $y_0$ | | $y_{-1}$ | | $y_{-2}$ | | $y_{-3}$ | … |
| | … | | $\Delta y_2$ | | $\Delta y_1$ | | $\Delta y_0$ | | $\Delta y_{-1}$ | | $\Delta y_{-2}$ | | $\Delta y_{-3}$ | | … |
| … | | $\Delta^2 y_2$ | | $\Delta^2 y_1$ | | $\Delta^2 y_0$ | | $\Delta^2 y_{-1}$ | | $\Delta^2 y_{-2}$ | | $\Delta^2 y_{-3}$ | | … | |
| | … | | $\Delta^3 y_1$ | | $\Delta^3 y_0$ | | $\Delta^3 y_{-1}$ | | $\Delta^3 y_{-2}$ | | $\Delta^3 y_{-3}$ | | $\Delta^3 y_{-4}$ | | … |
| | | … | | $\Delta^4 y_0$ | | $\Delta^4 y_{-1}$ | | $\Delta^4 y_{-2}$ | | $\Delta^4 y_{-3}$ | | $\Delta^4 y_{-4}$ | | … | |

表二　Newton 差分表

根据（4）式，华氏于卷一中得到如下三组关系式：

$$
(\text{甲})\begin{cases}(\text{一})\begin{cases}y_1=y_0+\Delta y_1\\ y_2=y_1+\Delta y_2\\ \vdots\\ y_n=y_{n-1}+\Delta y_n\end{cases}\\ (\text{二})\begin{cases}y_{-1}=y_0-\Delta y_0\\ y_{-2}=y_{-1}-\Delta y_{-1}\\ \vdots\\ y_{-n}=y_{-n+1}-\Delta y_{-n+1}\end{cases}\end{cases}
$$

$$
(\text{乙})\begin{cases}(\text{一})\begin{cases}\Delta y_1=\Delta y_0+\Delta^2 y_1\\ \Delta y_2=\Delta y_1+\Delta^2 y_2\\ \vdots\\ \Delta y_n=\Delta y_{n-1}+\Delta^2 y_n\end{cases}\\ (\text{二})\begin{cases}\Delta y_{-1}=\Delta y_0-\Delta^2 y_0\\ \Delta y_{-2}=\Delta y_{-1}-\Delta^2 y_{-1}\\ \vdots\\ \Delta y_{-n}=\Delta y_{-n+1}-\Delta^2 y_{-n+1}\end{cases}\end{cases}
$$

$$
(\text{丙})\begin{cases}(\text{一})\begin{cases}\Delta^2 y_1=\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_1\\ \Delta^2 y_2=\Delta^2 y_1+\Delta^3 y_2\\ \vdots\\ \Delta^2 y_n=\Delta^2 y_{n-1}+\Delta^3 y_n\end{cases}\\ (\text{二})\begin{cases}\Delta^2 y_{-1}=\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0\\ \Delta^2 y_{-2}=\Delta^2 y_{-1}-\Delta^3 y_{-1}\\ \vdots\\ \Delta^2 y_{-n}=\Delta^2 y_{-n+1}-\Delta^3 y_{-n+1}\end{cases}\end{cases}
$$

由此归纳得出：

据(一) $$\Delta^k y_n = \Delta^k y_{n-1} + \Delta^{k+1} y_n (n\text{ 为正整数}) \quad (4.1)$$

据(二) $$\Delta^k y_{-n} = \Delta^k y_{-n+1} + \Delta^{k+1} y_{-n+1} (n\text{ 为负整数}) \quad (4.2)$$

为“设一法可径求第某行之各数（$\Delta^k y_n$）”，华氏依次讨论了 2 阶、3 阶差分时，“0 边积较（$\Delta^k y_0$）”与“左右各边（$\Delta^k y_{\pm n}$）”的关系，如在 3 阶差分时，利用甲、乙、丙三式迭次回代，得到：

$$
\begin{cases}y_n=y_0+n\Delta y_0+\dfrac{n(n+1)}{2}\Delta^2 y_0+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}\Delta^3 y_0\\ \Delta y_n=\Delta y_0+n\Delta^2 y_0+\dfrac{n(n+1)}{2}\Delta^3 y_0\\ \Delta^3 y_n=\Delta^3 y_0\end{cases}
$$

（以上为“左卯行之式”）

$$\begin{cases} y_{-n}=y_0+n\Delta y_0+\dfrac{n\ (n-1)}{2}\Delta^2 y_0-\dfrac{n\ (n-1)\ (n-2)}{2\cdot 3}\Delta^3 y_0 \\ \Delta y_{-n}=\Delta y_0-n\Delta^2 y_0+\dfrac{n\ (n-1)}{2}\Delta^3 y_0 \\ \Delta^2 y_{-n}=\Delta^2 y_0-n\Delta^3 y_0 \\ \Delta^3 y_{-n}=\Delta^3 y_0 \end{cases}$$

（以上为“右卯行之式”）

故，一般地有

$$\Delta^k y_n=\sum_{i=0}\binom{n+i-1}{i}\Delta^{k+i}y_0 \quad (n>0,k=0,1,2,3) \tag{5}$$

$$\Delta^k y_{-n}=\sum_{i=0}(-1)^i\binom{n}{i}\Delta^{k+i}y_0 \quad (n>0,k=0,1,2,3) \tag{6}$$

至此，华氏指出“观以上各式，知左右卯行之式可合为一式”，即得到基本公式

$$(\text{卯}) \qquad \Delta^k y_n=\sum_{i=0}\binom{n+i-1}{i}\Delta^{k+i}y_0(n\ \text{为整数}) \tag{7}$$

对公式（7），华氏解释到“用此（卯）式之法求左行，则令卯为正数（$n>0$），求右行之数，则令卯为负数（$n<0$）”。可见，华氏意识到：

$$\binom{n+i-1}{i}=(-)^i\binom{-n}{i} \tag{8}$$

（8）式揭示了“本数增乘尖堆”和“本数减数增乘尖堆”的关系[注]，它也是现代组合学中有重组合和无重组合间的基本关系式。

综上可知，华氏已归纳地证明了下述定理：

**定理 1　（华蘅芳差分基本定理）**　设 $y_n=f(x)$ 是 n 次多项式，$\Delta^k y_0$ 是 f（x）的“0 边积较”（$k=0,1,2\cdots$），则对 $y_n$ 的任意 k 阶差分，有

$$\Delta^k y_n=\sum_{i=0}\binom{n+i-1}{i}\Delta^{k+i}y_0 \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{9}$$

---

[注]　华蘅芳在《数根术解》（1882）中，将“本数诸乘尖堆”定义为凡数“以本数累多加一数乘之，以一累多加一数除之，各求至若干次”，即

$$\frac{m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\binom{m+n-1}{n}$$

将“本数减数诸尖堆”定义为“”以本数累多减一数乘之，以一累多加一数除之，各求至若干次”，即

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\binom{m}{n}$$

公式（8）的正确性可如下证明

$$\begin{aligned}(-1)^i\binom{-n}{i}&=(-1)^i\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-i+1)}{i!}\\&=\frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\\&=\binom{n+i-1}{i}\end{aligned}$$

我们称上述定理为“华蘅芳差分基本定理”，是因为

1. 公式（9）揭示出“0边积较”与华氏差分表中任何一列差分的关系。而这一公式在一般的差分学著作中均未给出，属华氏所独创。

2. 在公式（9）中令k=0，则得到

$$y_n = \sum_{i=0}\binom{n+i-1}{i}\Delta^i y_0 (n \text{ 为整数}) \tag{10}$$

或者，对于n>0，有

$$y_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n+i-1}{i}\Delta^i y_0 \tag{10.1}$$

$$y_{-n} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\Delta^i y_0 \tag{10.2}$$

此即**华蘅芳有限差分公式。**

3. 若定义

(1) $P_i(x) = \binom{x+i-1}{i}$，　(2) $P_0(x) = 1$

则由（10.1）式又得到如下重要定理

定理2　设f（x）是一个n次多项式，则存在唯一的常数列$C_0$，$C_1$，$C_2$，…，$C_n$，使得

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}C_iP_i(x) \tag{11}$$

这里$C_i$（i=0，1，2，…，n）是f（x）的“0边积较”，$P_i$（x）称为差分多项式。

公式（10.1）、（10.2）和定理2均为有限差分学中基本的公式和重要的定理[6]，而它们又都为公式（9）所包容，所以，我们称其为“华蘅芳差分基本定理”是不无道理的。

还应指出，公式（10）中的差分间距为1，若要求出相邻两行之间的内插值，必须改变这一限制。对华氏的这一工作，请见文献［5］，此不重述。

## 三　华氏差分公式与Newton公式的一致性

在有限差分学中，所谓Newton公式是指[7]

$$N_1(x) = \sum_{r=0}^{n}\binom{u}{r}\Delta^r y_0 \tag{12}$$

$$N_2(x) = \sum_{r=0}^{n}\binom{u+r-1}{r}\Delta^r y_{-r} \tag{13}$$

式中u=（x−$x_0$）/h。显而易见，华氏差分公式（10.1）、（10.2）与Newton公式的结构上是相似的。文献［5］核校了华氏公式与Newton公式的插值精度，指出二者依式计算，保留小数点后六位仍无差异，这就启发我们应从理论上证明两组公式的一致性。

为此，首先区别二者差分记号的异同，比较华氏差分表和Newton差分表（表2），可见：

1. Newton差分表中的$\Delta^i y_0$是华氏差分表中的$\Delta^i y_i$；

2. Newton差分表中的$\Delta^i y_{-n}$是华氏差分表中的$\Delta^i y_0$。

下面先证公式（10. 2）与公式（13）的一致性。

证明：在 $N_2(x)$ 中，$u=(x-x_0)/h$，$(x<x_0)$，代以华氏条件：

$$x=-n, x_0=0, h=1$$

故有 $u=x=-n$，所以

$$N_2(-n)=\sum_{r=0}^{n}\binom{u+r-1}{r}\Delta^r y_{-r}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{-n+r-1}{r}\Delta^r y_0$$

$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\Delta^r y_0$$

$$=H_2(-n)$$

证毕。

但是，公式（10. 1）和公式（12）的一致性的证明，并不如此简单。因为，Newton 公式中的 $\Delta^k y_0$ 是华氏差分表中的 $\Delta^k y_k$，并不是 $\Delta^k y_0$，所以，必须设法寻求华氏差分表中 $\Delta^k y_k$ 与 $\Delta^k y_0$ 之间的关系。也就是说，若视（$y_0$，$\Delta y_1$，$\Delta^2 y_2$，…，$\Delta^n y_n$）与（$y_0$，$\Delta y_0$，$\Delta^2 y_0$，…，$\Delta^n y_0$）为表一（矩形数阵）的两组“基”，关键在于能否找出两组“基”之间的过渡矩阵。而颇有意味的是，这一过渡矩阵恰由“华蘅芳差分基本定理”（即公式 9）所确定。下面的证明将用到线性代数的有关知识。

证明：假定 $y_n$ 是一 n 阶差分函数，在公式（9）

$$\Delta^k y_n=\sum_{r=0}\binom{n+r-1}{r}\Delta^{k+r}y_0$$

中取 $n=k$，则有

$$\Delta^k y_k=\sum_{r=0}^{n-k}\binom{k+r-1}{r}\Delta^{k+r}y_0 \tag{14}$$

（求和上限为 $n-k$，是因为当 $r>n-k$ 时，$\Delta^{n+r}y_0\equiv0$）在（14）式中依次令 $k=0, 1, 2, \cdots, n$，便得

$$\begin{cases} y_0=y_0 \\ \Delta y_1= \Delta y_0+\binom{1}{1}\Delta^2 y_0+\binom{2}{2}\Delta^3 y_0+\binom{3}{3}\Delta^4 y_0+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\Delta^n y_0 \\ \Delta^2 y_2= \Delta^2 y_0+\binom{2}{1}\Delta^3 y_0+\binom{3}{2}\Delta^4 y_0+\cdots+\binom{n-1}{n-2}\Delta^n y_0 \\ \Delta^3 y_2= \Delta^3 y_0+\binom{3}{1}\Delta^4 y_0+\cdots+\binom{n-1}{n-3}\Delta^n y_0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \Delta^{n-1}y_{n-1}= \Delta^{n-1}y_0+\binom{n-1}{1}\Delta^n y_0 \\ \Delta^n y_n= \Delta^n y_0 \end{cases}$$

或改写为：

$$
(*)\quad \begin{pmatrix} y_0 \\ \Delta y_1 \\ \Delta^2 y_2 \\ \Delta^3 y_3 \\ \vdots \\ \Delta^{n-1} y_{n-1} \\ \Delta^n y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & 1 & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{n-2}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ & & 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n-2}{n-3} & \binom{n-1}{n-2} \\ & & & 1 & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n-2}{n-4} & \binom{n-1}{n-3} \\ & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 1 & \binom{n-1}{1} \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_0 \\ \Delta^3 y_0 \\ \vdots \\ \Delta^{n-1} y_0 \\ \Delta^n y_0 \end{pmatrix}
$$

于公式（12）中，因 Nweton 差分表中的 $\Delta^k y_0$ 是华氏的 $\Delta^k y_k$，即 $\Delta^k y_0=\Delta^k y_k$，故有

$$
\begin{aligned}
N_1(x) &= y_0 + u\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \binom{u}{n}\Delta^n y_0 \\
&= y_0 + u\Delta y_1 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_2 + \cdots + \binom{u}{n}\Delta^n y_n \\
&= \left(1, u, \binom{u}{2}, \cdots, \binom{u}{n}\right) \begin{pmatrix} y_0 \\ \Delta y_1 \\ \Delta^2 y_2 \\ \vdots \\ \Delta^n y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

以（*）式右端替换上式中的（$y_0$，$\Delta y_1$，$\Delta^2 y_2$，…，$\Delta^n y_n$），有

$$
N_1(x) = \left(1, u, \binom{u}{2}, \cdots, \binom{u}{n}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ & & 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 1 & \binom{n-1}{1} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_0 \\ \vdots \\ \Delta^{n-1} y_0 \\ \Delta^n y_0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \left(1, u, \frac{u(u+1)}{2!}, \cdots, V(u, n-1)\right) \begin{pmatrix} y_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_0 \\ \vdots \\ \Delta^{n-1} y_0 \\ \Delta^n y_0 \end{pmatrix}
$$

其中，

$$V(u,n-1)=\binom{u}{0}\binom{n-1}{n}+\binom{u}{1}\binom{n-1}{n}+\binom{u}{2}\binom{n-1}{n-2}+\cdots+\binom{u}{n}\binom{n-1}{0}$$

在 Vandermode 恒等式[注] 中，取 n=u，r=n，m=n−1，便得

$$V(u,n-1)=\binom{u+n-1}{n}$$

所以

$$\begin{aligned}N_1(x)&=y_0+u\Delta y_0+\binom{u}{2}\Delta^2 y_0+\cdots+\binom{u}{n}\Delta^n y_0\\&=y_0+u\Delta y_0+\binom{u+1}{2}\Delta^2 y_0+\cdots+\binom{u+n-1}{n}\Delta^n y_0\\&=H_1(x)\end{aligned}$$

证毕。(注意，上式中第一个等式中的 $\Delta^k y_0$ 与第二个等式中的 $\Delta^k y_0$ 意义不同)。

由此可见，华蘅芳差分公式中的 n，不必限于“整点”，可以推广到一般的插值点 $u=(x-x_0)/h$ 的情形。这一证明同时也对文献 [4] 中提出的“$f_n$ 能否取 sinx 或 lnx，n 的意义能否改变或扩大”的问题，作出了肯定的回答。

## 四 应用举例

本节简要介绍华氏关于“积较术”的应用，所举之例，均取自原著。

1. 已知 $\Delta^k y_0$，求 $\Delta^k y_n$，或已知 $\Delta^k y_n$，求 $\Delta^k y_0$。

例 1 “如有某行积较 343、−1、6、−6，径求其左第七行之数”(卷一，10 页 b)。

解：设 $y_0=343$，$\Delta y_0=-1$，$\Delta^2 y_0=6$，$\Delta^3 y_0=-6$。于公式 (10. 1) 中取 n=7，则有

$$\begin{aligned}y_7&=343-7+168-504=0\\\Delta y_7&=-1+42-168=-127\\\Delta^2 y_7&=6-42=-36.\\\Delta^3 y_7&=-6\end{aligned}$$

原著同时指出，若视 0，−127，−36，−6 为“0 边积较”，求其右第七行之数，此时则于公式 (10. 1) 中令 n=−7，以及 $y_0=0$，$\Delta y_0=-127$，$\Delta^2 y_0=-1$，$\Delta^3 y_0=-6$，便得 $y_{-7}=343$，$\Delta y_{-7}=-1$，$\Delta^2 y_{-7}=6$，$\Delta^3 y_{-7}=-6$。

2. 由“诸乘方式”求“积较式”，或由“积较式”返求“诸乘方式”。

为解决这类问题，华氏在卷二中构造了两种数表：“诸乘正元积较表”[即 $x^n$ 的“0 边积较”(x=1，2，3，…)] 和“积较还原表”(两表的构造方法详见文献 [4])，并给出了一种

---

[注] Vandermode 恒等式是

$$\binom{n+m}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{r-2}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

见文献 [6]。

"用表之法"，即"以诸乘方之实方廉隅依次直乘表中各行之数而并之"——对这一算法思想所蕴含的数学价值，容当另文叙及，此处仅举例以明其用。

| n \ K | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | −1 | 2 | | | |
| 3 | 0 | 1 | −6 | 6 | | |
| 4 | 0 | −1 | 14 | −36 | 24 | |
| ⋮ | | | | | | |

表三　诸乘方正元积较表

| n \ K | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | $\frac{1}{1}$ | | | | |
| 2 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | |
| 3 | 0 | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | | |
| 4 | 0 | $\frac{6}{24}$ | $\frac{11}{24}$ | $\frac{6}{24}$ | $\frac{1}{24}$ | |
| ⋮ | | | | | | |

表四　积较还原表

例 2　已知 $f(x)=x^3-112x^2+947x-2060$，求 $\Delta^k f_3(0)$ $(k=0, 1, 2, 3)$（卷二，3 页 b）

解：由"诸乘方式"求"积较式"，当用"诸乘正元积较表"。以华氏的"用表之法"演算如下

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −2060 | 1 | | | | ⟶ | −2060 | | | |
| 947 | 0 | 1 | | | | 0 | 947 | | |
| −112 | 0 | −1 | 2 | | | 0 | 112 | −224 | |
| 1 | 0 | 1 | −6 | 6 | | 0 | 1 | −6 | 6 |
| | | | | | | −2060 | 1060 | −230 | 6 |

即有 $f(0)=-2060$，$\Delta f(0)=1060$，$\Delta^2 f(0)=-230$，$\Delta^3 f(0)=6$。

例 3　已知 $f_3(0)=-105$，$\Delta f_3(0)=87$，$\Delta^2 f_3(0)=-36$，$\Delta^3 f_3(0)=6$，求 $f_3(x)$。（卷二，13 页 b）

解：由"0 边积较"求 $f(x)$ 则用"积较还原表"，仍用华氏的"乘表加之"算法：

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −105 | 1 | | | | ⟶ | −105 | | | |
| 87 | 0 | $\frac{1}{1}$ | | | | 0 | 87 | | |
| −36 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | −18 | −18 | |
| 6 | 0 | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | | 0 | 2 | 3 | 1 |
| | | | | | | −105 | 71 | −15 | 1 |

所得结果依次为$a_3=-105$，$a_2=71$，$a_1=-15$，$a_0=1$，故有

$$f(x)=x^3-15x^2+71x-105$$

3. 求解高次方程

用差分法求高次方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根，华氏给出的程序如下：先求f（x）的"0边积较"$\Delta^k f(0)$，据此列出f（x）的差分表（x=1，2，3，…），如果有f（i）=0则i是f（x）的一个根；如果f（0），f（1），f（2），…，f（i）同号，而f（i+1）出现变号，则说明f（x）在（i，i+1）内有一根，此时以$\Delta^k f(i)$为"0边积较"，返求$f_1(x)$。再对$f_1(x)$如上述程序续求根的第二位数字。

例4　已知$f(x)=x^3-190x^2-2627x-2436=0$　　(1)

求其根。(卷二，21页a)

解：因方程（1）的"实"的绝对值较大，故先"将原式之隅步其下廉"，尔后求其"0边积较"。即对方程（1）进行扩根变换x=10y得

$$f(y)=1000000y^3-1900000y^2-262700y-2436 \tag{2}$$

求f（y）的"0边积较"（法见例2），得

$f(0)=-2436$，$\Delta f(0)=2637300$，$\Delta^2 f(0)=-9800000$，$\Delta^3 f(0)=6000000$

其差分表为（此时差分间距为100，首行为0）

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9109464 | −127836 | −1165136 | −2436 |
| 9237300 | 1037300 | −1162700 | 2637300 |
| 8200000 | 2200000 | −3800000 | −9800000 |
| 6000000 | 6000000 | 6000000 | 6000000 |
| | | | 边数 |
| 300 | 200 | 100 | 0 |

可见，f（y）在（200，300）内有一根，以200为"0边"返求其"诸乘方式"（法见例3），得

$$f_1(y)=y^3+410y^2+41373y-127836=0 \tag{3}$$

至此，可以验证由f（x）变至$f_1(y)$是作了一次减根变换y=x−200。下再续求$f_1(y)$的"0边积较"，得

$f_1(0)=-127836$，$\Delta f_1(0)=40964$，$\Delta^2 f_1(0)=814$，$\Delta^3 f_1(0)=6$

列出$f_1(y)$的积较表（此时长率为1，首行之数为200）

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | −43442 | −86052 | −127836 |
| 43442 | 42610 | 41784 | 40964 |
| 832 | 826 | 820 | 814 |
| 6 | 6 | 6 | 6 |

边数

203　　202　　201　　200

所以原方程的根为203，华氏同时指出："若将题或用负元积较表，可求得其两个小元数为－1、－12"。

利用此法，仅要注意改变变换后的差分间距（"边之长率"），即可求得根的指定精度，此不再举例。华氏此法，虽不及秦九韶方法简便，但其省去"试商"之难，算法明确，程序井然，具数学价值是应肯定的。

4. 对垛积的应用

垛积与差分互为逆运算，是中算传统的研究项目。华氏在《积较术》卷三中将其差分理论应用于垛积，获得一些重要成果，如

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} h_k^n \binom{x+k-1}{k}$$

$$\sum_{x=1}^{m} x^n = \sum_{k=1}^{n} h_k^n \binom{m+k}{k+1}$$

$$S_p^n(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k^n \binom{x+k+p-2}{k+p-1}$$

其中 $h_k^n$ 为第一种华氏数，$S_p^n$（x）为"乘方各乘垛"，这样，又可使我们对华氏的工作从组合数学的角度给以新的评价[4]。

上述研究表明：

1. 华氏的工作是近代差分意义上的研究，形成了一个完整的具有自己特点的差分理论体系。其中"华蘅芳差分基本定理"的创获，是这一体系的核心。

2. 有限差分学的一个重要应用，是从变元的间断变化来研究函数，属于离散数学。因此，华氏的工作也以一个侧面反映出中国传统数学离散性的重要特征。

应该指出，在中国数学史上，关于有限差分的最早研究，可以回溯到汉末以来天文学家推算日、月、五星行度的"招差法"，宋元数学家对此作出过具有世界意义的贡献，清代学者如李善兰（1811—1882），夏鸾翔（1823—1864）等也有重要的研究。因此，从历史发展的观点，去探讨由"招差法"到"积较术"的演变过程，无疑是一个有意义的课题。

## 参 考 文 献


[1] 华蘅芳：《积较术》，《行素轩算稿》之四，梁谿华氏首刊本（1882）。（下引文皆同此）

[2] [3] 李俨："中算家的方程论"，《中算史论丛》第一集，1954，中国科学院出版，第246—314页。

[4] 罗见今："华蘅芳的计数函数和互反公式"，《中国数学史论文集》（二），1986，山东教育出版社，第107—124页。

[5] 罗见今："华蘅芳的内插法"，《内蒙古师大学报》（自然科学版），1989 年第 1 期数学史增刊，第 41－49 页。
[6]《中国数学史论文集》（二）"前言"，1986，山东教育出版社。
[7] 华罗庚：《高等数学引论》第 1 卷，1963，科学出版社。
[8] 陈景润：《组合数学简介》，1988，天津科学技术出版社。
[9] Danial. I. A. Cohen, Basic Techniques of Combinational Theory, 1978, U. S. A.

# 稿本《合数术》研究*

纪志刚
（徐州师范学院数学系）

华蘅芳（1833－1902），江苏金匮（今无锡市）人，晚清著名数学家。年轻时，他“志向博通，欲明西学”，[1]与玛高温（D. J. Maggowan，1814－1893）、金楷理（C. T. Kreyer，1866年来华）、傅兰雅（J. Fryer，1839－1928）等人翻译了西方地矿、地质、军事、气象、数学等科技文化书籍，达十余种，一百余卷，为西方近代科技文化知识在中国的传播作出了不朽的贡献。《合数术》就是华氏数学译著的一种，该书的稿本现为李迪先生珍藏。经过对稿本《合数术》的研究，本文认为：

1.《合数术》一书并未刊刻；

2.“合数”之术并不是“对数造表法”，而是一种精度较高的近似计算法。

## 一　两个误解的辩证

五十年代中，李迪先生去南方访求古算书，在上海书坊购得《合数术》五册，共十一卷。此书第一册扉页上写有“此册为余手写校定之本，依此写样，即可付梓矣。蘅芳识”。书中蝇头小楷，备及工整，亦有多处朱笔修改之迹，故是书必为华氏稿本无疑。



华蘅芳

李俨先生在《近代中算著述记》一文“华蘅芳”条下，标明该书刊刻于光绪14年（1888），藏于安徽省图书馆[2]，李迪先生曾去该馆核对，但遍查书目未见。后又曾去信再询，所得答复仍是“本馆藏无此书”，此外，国内主要图书馆中也不见华蘅芳的《合数术》。不过，所见者却是1888年刻于天津的林绍清的《合数述》。

查林绍清《合数述·序》，言：

“丁亥（1887）春杪，劳大令乃宣以傅君兰雅华君蘅芳近译之《合数术》惠示，是书为英国白君尔尼所撰。……，书凡十一卷，尚未刊行，爰手录一过，详加校核，召手民而商剞劂，乃以工费过钜，力有未逮，不果。……”。[3]

可见，华氏译本在1887年之前没有刊刻。再，林氏序中又道：

---

本文系作者硕士论文《华蘅芳的数学工作研究》中的一节。撰写中，导师李迪教授为我提供了他珍藏30多年的《合数术》稿本。值此这部珍贵的文献首次披露之际，我谨向我的导师李迪先生表示衷心的感谢。

"……，暇鼓之余，风雨尾永。因本其立术之旨，融会贯通，另述二卷，即名曰《合数述》。上卷明合数之法，下卷详合数之用。篇幅较简，简而弗略；词意求浅，浅则易明。条分缕晰，比类参稽即以为合数之先声耳。"[4]

林氏此序写于"光绪 14 年(1888)仲春之月"。经笔者核对，林氏两卷本《合数述》是华氏十一卷本《合数术》的节本，显然，林氏节本的刊刻取代了华氏的十一卷本。据此推断，李俨先生所记刻于光绪 14 年之说，似应系林氏两卷本《合数述》之误。

正因此书未能刊刻，对其书所论内容就产生了一些误解。早如钱宝琮先生认为："《合数术》十一卷(公元 1887 年)，此书为英人白尔尼原著，论对数造表法"。[5]钱先生的这一观点，多为后人所引用。甚至于新近出版的一部由日本科学史家伊东俊太郎等编纂的《科学技术史词典》中的"华蘅芳"条也循上说。[6]。

这一误解的原因何在呢？再考林氏《合数述・序》，有：

"……(合数术)别以新理新法发明指数之义蕴，推广真数之作用，凡真数对数之杂糅及所设最繁难，最无凭之相等式，他法所不能推或勉强能推而极费心力者，以是术推广，皆可迎刃而解，算学中律师制胜者也。"

从此引文中的"指数""真数""对数"之语，再由林氏书中颇多篇幅的"合数表"，估计钱先生的误解源出于此。下文的研究将表明，合数术是一种新的近似程度较高的计算方法。

## 二　《合数术》内容概述

《合数术》一书的作者为英国人白尔尼[7]，译本没有说明原著的写作年代，但从书中的有关史料可知其书成于 1857 年之后。* 不过，白尔尼并非是该术的首刊者，因书中说到"西国始悟得此术之人，名曰密几理。自密几理以前，未有人考究此种数理也。"

是书"总引"中，白尔尼认为：

"此书所论之理，谓之合数，乃算学中一种新术，并非将旧术所能推之事，更立新法也。"

"此种算学能推广真数之作用，扩充算学之界限，又能设立新法，使甚难而大有用之题易推，可免用表及其繁之式，并不足凭之略法"。

"此书中所设之题，意欲显出合数之各种用法，故不惮繁冗错杂，以便学者易明其理。"

"此书中所有之算式，并非删繁就简，每算一题，必将其层累曲折，步步写出，因不欲之致迷也。"

可见，作者的目的是介绍、普及合数算法，不过合数之法并不象作者所说"可免用表及其繁之式"，它的造算过程繁复冗长，而且离不开"合数表"。关于合数的进一步研究，依原著之说"余更有数种新理新法，已与密几理观之"，"他日欲著一书，将代数及微分、积分以此术畅发其趣，名之曰《穷形之算理》，已将各种深代数之题，以新法明之，不必籍微积分而得，不久可印行矣。"兹将稿本《合数术》的内容概要述之如下：

---

* 《合数术》卷 8"级数公法"第 5 题地球与日相距 95364768 公里，求其对数，白尔尼以合数的方法求得 $\lg 95364768 = 7.97938795$ 后，指出："此常数之对数在 1857 年布国(比利时)费迦所印之表中错了此数"，故知是书成于 1857 年之后。

卷首先于“总引”中对“合数术”作一介绍，尔后于“卷首(上)”讲述合数的定义，各种记号，合数与常数的互换。“卷首(下)”给出六种互换表，并取大量的例题以明其用。

卷1—3论述合数的基本运算：乘法、除法、乘方及开方法。

卷4—6讨论合数在平面三角，球面三角中的应用。

卷7—9论述用合数之法解各种代数方程，比较有特色的是解如下方程

$x^2-120x-100x^{\frac{1}{2}}+999x^{\frac{1}{3}}=91000$

(原著求得 $x=358.98937$，用 $\text{CASLO}_{fx-4100}$ 计算器核算有 $f(358.98937)=90000.957$)

$x^x=8722.83528$

(原著求得 $x=5.38776485$，同上校算有 $f(5.38776485)=8722.8351$)

卷10为“杂题之法”。内容涉及代数、方程、三角测量、椭圆积分、球面三角以及一些较深的物理问题。

卷11再论“合数开方术”，即代数方程求根的问题。并称“代数学之功夫大半从相等内求出其未知之数，……，从前最有名之各算家已费尽大力欲求各次乘方式之根，迄未能得公法，固惟用数学以求各方之根，其法最为繁重。”认为“此书所设之公法不难合于平常各事之用，故可以云：此法为代数学内所增之各门中最益之事，无此公法，则代数之学未为完善也。”

## 三　合数的定义和运算

合数的定义基于如下事实：

“凡数无论何数，命之为 (N)，皆能化之为级数连乘之形”(卷首上)。

即有：

$$N=a\left(1+\frac{1}{10}\right)^{a_1}\left(1+\frac{1}{10^2}\right)^{a_2}\left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{a_3}\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{a_4}\cdots \tag{1}$$

省去括号内的底数，仅以指数记之为：

$$N=a\downarrow a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots \tag{2}$$

其中，$a_i(i=1,2,\cdots)$即是N的合数，如

$$\begin{aligned}3.1415927&=\left(1+\frac{1}{10}\right)^{12}\left(1+\frac{1}{10^2}\right)^{0}\left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{1}\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{0}\left(1+\frac{1}{10^5}\right)^{0}\cdot\\&\quad\left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{8}\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{2}\left(1+\frac{1}{10^8}\right)^{3}\\&=\downarrow 12,0,1,0,0,8,2,3\end{aligned} \tag{3}$$

一般说来，将一个实数化为形如(1)式的连乘积，其化得的结果不是唯一的，也就是说，一个实数的合数有多种形式。原著以 $\pi$ 为例：

$$3.1415927=\downarrow 12,0,1,0,0,8,2,3 \tag{3.1}$$

$$=\downarrow 12,0,0,10,0,6,16,18 \tag{3.2}$$

$$=\downarrow 10,15,40,20,35,40,30,25 \tag{3.3}$$

$$=\downarrow 7,42,56,35,14,28,49,7 \tag{3.4}$$

$$=\downarrow 0,0,0,0,0,0,0,114478742 \tag{3.5}$$

原著认为这五个合数各有其用：第二式便于计算$\sqrt{\pi}$，第三式便于计算$\sqrt[5]{\pi}$，第四式便于计算$\sqrt[7]{\pi}$，第五式便于求 π 的任何次方根，以及 logπ 或 lnπ，而且这种形式的合数最为重要，原著特命之为"末合数"，没有专节讨论它与其他各形合数的互化和它的应用，一个常数，竟有多个合数与应之对应，这也许正是合数的特点所在。

据合数的定义式(1)，有合数的乘除之法如下

$$\alpha\downarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\times\beta\downarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n=\alpha\cdot\beta\downarrow\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n \tag{4}$$

$$\alpha\downarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\div\beta\downarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n=\frac{\alpha}{\beta}\downarrow\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_n-\beta_n \tag{5}$$

对于合数术来说，基本的问题是合数和常数的互化，译著于卷首(上，下)以 90 页的篇幅详细的讨论了有关问题，甚为详备，今仅择要介绍。

1. "求任何合数相配之常数"

例 1　化$\downarrow 7,2,6,0,7,8,2,6$为常数

解：由合数定义有

$$\downarrow 7,2,6,0,7,8,2,6=(1+\frac{1}{10})^7(1+\frac{1}{10^2})^2(1+\frac{1}{10^3})^6(1+\frac{1}{10^5})^7(1+\frac{1}{10^6})^8(1+\frac{1}{10^7})^2(1+\frac{1}{10^8})^6$$

据二项式定理，演算如下

| | |
|---|---|
| $\downarrow 7=$ | 1.94871710 |
| $2\times10^{-2}\downarrow 7=$ | 3897434 |
| $10^{-4}\downarrow 7=$ | 19487 |
| $\downarrow 7,2=$ | 1.98788631 |
| $6\times10^{-3}\downarrow 7,2=$ | 1192732 |
| $15\times10^{-6}\downarrow 7,2=$ | 2982 |
| $20\times10^{-9}\downarrow 7,2=$ | 4 |
| $\downarrow 7,2,6=$ | 1.99984349 |
| $7\times10^{-5}\downarrow 7,2,6=$ | 13999 |
| $\downarrow 7,2,6,0,7=$ | 1.99998348 |
| $8\times10^{-6}\downarrow 7,2,6,0,7=$ | 1600 |
| $\downarrow 7,2,6,0,7,8=$ | 1.99999948 |
| $2\times10^{-7}\downarrow 7,2,6,0,7,8=$ | 40 |
| $\downarrow 7,2,6,0,7,8,2=$ | 1.99999988 |
| $6\times1\downarrow 7,2,6,0,7,8,2=$ | 11 |
| $\downarrow 7,2,6,0,7,8,2,6=$ | 1.99999999 |

注意到上述运算中，只取八位小数，故遇 $10^{-9}$，$10^{-10}$，…，皆不入算，这样又可将上述程序简化，因为

$$\downarrow 0,0,0,0,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8$$

$$=\left(1+\frac{1}{10^5}\right)^{\alpha_5}\left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{\alpha_6}\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{\alpha_7}\left(1+\frac{1}{10^8}\right)^{\alpha_8}$$

$$=1+\alpha_5 10^{-5}+\alpha_6 10^{-6}+\alpha_7 10^{-7}+\alpha_8 10^{-8}+\binom{\alpha_5}{2}10^{-10}+\binom{\alpha_6}{2}10^{-12}+\cdots$$

$$=1.0000\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8\cdots\cdots$$

这样，"凡八项之合数，其末四项可以径写之为"：

$$\downarrow 0,0,0,0,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8=1.0000\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$$

所以上述化法简化如下：

$$\begin{array}{rr}
\downarrow 0,0,0,0,7,8,2,6= & 1.00007826 \\
\times\downarrow 7 & 70005478 \\
 & 21001643 \\
 & 3500274 \\
 & 350027 \\
 & 21002 \\
 & 700 \\
 & 10 \\
\hline
\downarrow 7,0,0,0,7,8,2,6= & 1.94886960 \\
\times\downarrow 0,2 & 3897739 \\
 & 19489 \\
\hline
\downarrow 7,2,0,0,7,8,2,6= & 1.98804188 \\
\times\downarrow 0,0,0,6 & 1192825 \\
 & 2982 \\
 & 4 \\
\hline
\downarrow 7,2,6,0,7,8,2,6= & 1.99999999
\end{array}$$

一般说来，这种化法是颇费计算的，原著也说："若欲印行合数表，则用舒茯所造算器，即能兼算与印"。不知舒茯为何许人，所制算器是否专为合数而设，备之待考。

2. "求任何常数相配之合数"

首先有下表：

$$\downarrow 1=1.1$$

$\downarrow 2=1.21$

$\downarrow 3=1.331$

$\downarrow 4=1.4641$

$\downarrow 5=1.61051$

$\downarrow 6=1.771561$

$\downarrow 7=1.9487171$

$\downarrow 8=2.14358881$

$\downarrow 9=2.357947691$

下举一例以明其化法：

例 2　"求将 1.41421356 化为八项之合数"

解：记 $\beta=1.41421356$，设作求 $\beta$ 的合数为 $\downarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8$，由上表，有

$\downarrow 3<\beta<\downarrow 4$

故取 $\alpha_1=3$，至于如何确定 $\alpha_2$，原著仅指出

$$\alpha_2=(1414-1331)\div 13=6\cdots(\text{余数舍去}) \tag{1}$$

事实上，由假定 $\beta$ 的第二位合数为 $\alpha_2$，即有

$$\beta=\downarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots=\downarrow \alpha_1+10^{-2}\times\alpha_2\downarrow \alpha_1+\cdots \tag{2}$$

$$\therefore \alpha_2=\frac{10^2\beta-10^2\downarrow \alpha_1}{\downarrow \alpha_1}-\cdots \tag{3}$$

因原著采用逐次逼近的方法求 $\alpha$，故有(1)式成立。仿此有

$$\alpha_3=\frac{10^3\beta-10^3\downarrow \alpha_1,\alpha_2}{\downarrow \alpha_1,\alpha_2}-\cdots \tag{4}$$

且 $\downarrow 3,6=1.41288332$，分子、分母各取小数点后两位数字入算，有

$$\alpha_3=\frac{141421-141288}{141}=0\cdots(\text{余数舍去}) \tag{5}$$

同理求得

$$\alpha_4=\frac{14142135-14148833}{1412}=9\cdots(\text{余数舍去}) \tag{6}$$

再求出 $\downarrow 3,6,0,9=1.415496$，此时 $\beta$ 的前四位合数已得，故第五位以下合数可以一并求得

$$\frac{10^5\beta-10^5\downarrow 3,6,0,9}{\downarrow 3,6,0,9}=4,1,4,5$$

所以，

$$1.41421356=\downarrow 3,6,0,9,4,1,4,5$$

经验证无误。

至此，可见合数算法确是"算学中一种新术"，不过它并不是象作者在"总引"中所说的"可免用表及其繁之式"，这一点从以上所论合数与常数的换算之繁复就已明白表露出来了。关于合数的应用，限于篇幅（它也是很繁的）不再举例，可以参阅林绍清《合数述》下卷。

## 三　《合数术》中的近代数学、物理知识

原著为阐明合数的应用，举了大量的例子，其中一些涉及到西方近代科学领域。这些材料对于研究西方科学的传入是十分重要的。但是，其中有些内容，在林绍清两卷本的《合数述》中

被删掉了。今从稿本中辑出，以备研究之用(但略去解算过程)。

正态分布曲线　卷 7“解代数各次相等之式公法”，第 10 题给出了正态分布函数

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \tag{1}$$

要求 x，使得

$$\int_0^x f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \tag{2}$$

因此这是一个变上限的积分方程

$$y(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{1}{2} = 0 \tag{3}$$

的求解问题。原著的解法是将 $e^{-x^2}$ 展开成幂级数，逐项积分后化为

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2!}x^5 - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3!}x^7 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4!}x^9 - \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \tag{4}$$

求得 $x = \frac{1}{2}$，6,1,4,6,5,1,8,1＝0.89880787，(解法可参见林本《合数述》卷下 14 页)

平衡过程的功　卷 10“用合数解数种紧要之题”、第 14 题为“汽机(汽缸)之鞲鞴(活塞)每平方寸受汽之抵力六十五磅，推机路为十一.六尺，推机路行到二尺时，则断绝进气，求鞲鞴每平方寸功力率”。

书中推导过程如下：令 $x$“为推机路任一分时所推之尺数，(即未知数)”，$p_2$“为行之路之时所有之汽抵力”，$h_1$ 为“断绝汽路之前所行之尺数”，$h_2$ 为“推之长之尺数”，$p_1$ 为“进汽之抵力”，则依“布威尔之例”有

$$p_2 x = p_1 h_1 \tag{5}$$

即

$$p_2 = \frac{p_1 h_1}{x} \tag{6}$$

取 $x=h_1$ 和 $x=h_2$ 为积分下、上限，积分：

$$\int_{h_1}^{h_2} p_2 dx = \int_{h_1}^{h_2} p_1 h_1 \frac{dx}{x} = p_1 h_1 (l_n h_2 - l_n h_1)$$

$$= p_1 h l_n \frac{h_2}{h_2} \tag{7}$$

“此为汽涨力之时，每平方寸所有之工力率。而未用涨力之前所有之功率必为 $h_1 p_1$，所以每平方寸之功率为

$$ph_1 + p_1 h_1 l_n \frac{h_2}{h_1} \tag{8}$$

此为求汽机工力率之公法。”

文中所说“布威尔之例”即理想状态下的波义耳(R. Boyle，1627－1691)定律，本题所讨论的问题则属于物理学中“平衡过程”中的系统做功问题。

单摆　卷 10 第 15 题“摆以平圆线摆动之时”。题中要求摆以最低点 $A_2$ 摆到最高点 $A_4$ 所用的时间，据摆的等时性，可换求从 A 至 $A_2$。记 $A_2O=R$，$A_2B_1=$，$B_1B_2=dx$，$AA_1=ds$，注意 $A_2A_3A_4$ 为摆的上行路程，则 ds 为正。题中给出一个计算摆从 $A_3$ 至 $A_4$ 的计时公式

$$t=\int\frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}} \tag{9}$$

这是因为，假定由 A 处（静止）摆至 $A_1$（微小的摆程）时，视其为直线运动，故有

$$dt=\frac{ds}{v} \tag{10}$$

根据能量守恒定律

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+mgx \tag{11}$$

所以

$$v^2=2(h-x) \tag{12}$$

故有

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{2g(h-x)}} \tag{13}$$

两边积分便得(9)式。

综上可见，《合数术》立术新颖，应用较广，绝非是专论对数之作。这一误解，实应予以澄清，但也应指出，"合数"一术虽出现于 19 世纪中期，可是由于其自身的缺陷（如计算繁复、不便掌握）、而终未能成为近代数学的一支，这当是科学发展的必然规律。至于《合数术》在中国数学史上的影响，怕是甚为微小。查晚清数学史料，除林氏的两卷本《合数述》之外，另与《合数术》有关的史料，所见者仅有如下两条：

1.《俟实学堂外课文》中载有蒋大椿的一篇习算体会，其文结尾处认为"……他若合数术、决疑数学亦皆变通古法而为之，吾意数年之后必将另有新术，驾乎微积之上"。

2. 李俨《近代中算著述记》"方士镏"条下，记有"《合数术》方士镕撰，光绪 24 年(1898)上海石印本。"遗憾的是李俨先生未注明该书收藏之处，今仅记于此，尚待进一步研究之。

在 A. A. Bennett 的《傅兰雅译著考略》一书中没有提到此书，不知何故？

## 参考文献


〔1〕《格致汇编》第三年。

〔2〕李俨：《中算史论丛》第二集，1954，中国科学院，第 230—231 页。

〔3〕〔4〕：林绍清：《合数述·序》(1888)。

〔5〕钱宝琮：《中国数学史》，1964，科学出版社，第 336 页。

〔6〕伊东俊太郎等编，樊供业等译：《科学技术史词典》，1986，光明日报出版社，第 308 页。

# 卢靖两稿本数学书跋

李兆华
（天津师范大学数学系）

卢靖（1855—1948），字勉之，号木斋，沔阳人，清末民初数学家。著《割圆术辑要》11卷、《万象一原演式》9卷和《火器真诀释例》1册，有印本行世。但是他还有未刊印的稿本数种，1983年于天津古旧书店购得《迭微分补草》和《九章代数草》两种，现藏于天津师范大学图书馆。因两书稿鲜为人知，故作跋公之同好。

## 一　稿本《迭微分补草》跋

此书又名《求级数通法》，毛装一册，毛笔书写，全文25叶。首叶序文末记“壬寅（1902）七月木斋自识”。前有“木斋卢氏珍藏”，后有“沔阳卢靖所置”阴文印章各一。书中第二节之后空叶栩注：“应录马氏、戴氏二公式于此篇，以便求级数之用”。据此可知，此本为未完手稿。李俨《近代中算著述记》于卢靖条下载：《代数术补草》四卷，《迭微分补草》一卷，卢靖撰。未刻。见一九二九年图书馆学季刊三卷一、二期。其中《迭微分补草》一卷当即此本。

书的正文分为“《拾级》求迭微分”、“《溯源》迭求微系数”、“补《拾级》求函数极大极小六题补草”三节。序文一篇，圈点勾划已见用心之专，廖廖数语颇具该书主旨：“微积分以迭微分为最切用。凡取正负整分各方之二项例以及指函数、对函数、圜函数、角函数之级数，求函数之极大极小，无不由迭微分与代于戴、马二公式而得。《代微积拾级》十一、十二两卷后列各题仅有答式，即间有草者亦简略不备，其如何求得颇费探索。《微积溯源》二卷所列六式虽较《拾级》为详，然如三式之对数求迭微分亦急索解而不得也。因于案牍之暇，辑二书之术与马氏、戴氏二公式，逐题为补演细草以便于用此术者。壬寅七月木斋自识。”

所谓迭微分即高阶导数。由戴劳（B. Taylor，1685—1731）公式及马克洛林（C. Maclaurin，1698—1746）求幂级数展开式，以及求函数极大极小值，要计算函数的逐级导数，卢氏以《代微积拾级》、《微积溯源》二书有关内容之演草不备而有此作。这未完稿中主要涉及幂函数，三角函数的高阶导数演草。所用符号悉依早期译法。例如，

$$\frac{\text{甲丄天}}{\text{一}}=\frac{\text{甲}}{\text{一}}\text{丅}\frac{\text{甲}^{\text{二}}}{\text{天}}\text{丄}\frac{\text{甲}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{二}}}\text{丅}\frac{\text{甲}^{\text{四}}}{\text{天}^{\text{三}}}\text{丄}\cdots$$

即

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\cdots\cdots$$

李善兰（1811—1882）所译《代微积拾级》18卷（1859）为西方微积分传入中国之始。嗣后，

华蘅芳（1833—1902）译《微积溯源》8卷（1874）较之李译通畅易晓。该两书成为近代数学传入中国之代表作。然而，与《几何原本》初入中国时的情形类似，确能掌握其中数学方法者盖亦鲜矣。由卢氏所补各草可知，氏之于两书确也下了一番功夫，藉此亦可窥见当时对两书的一点研究情况。况此本为未刊手稿亦不得同寻常抄本等视之矣。

## 二 稿本《九章代数草》跋

《九章代数草》，不见于诸家书目。原书10卷首1卷，有光绪癸卯（1903）卢靖自序。今存首卷至卷二，卷五至卷八，两册，毛笔书写。抄书纸之中缝下方有“直隶编译处”五字。此本缺卷三至卷四，卷九至卷十，是全帙当为四册。

据序可知，此本成于1887年。其时卢靖任天津武备学堂算学总教习，华蘅芳等人亦在堂教授数学。课余时间令学生以当时传入的代数知识演算中国古代数学习题，编为《几何代数術》6卷，《九章代数草》10卷。后一种即此本之谓也。序称“草藏行箧十余年，奔走俗吏录录鲜暇，无克为诸生校刊”，又称因人访索，“先呈此草付刊”。书中夹有校对批语一纸，其中列举演草错误数条，又称“既拟发刊，尤需仇精审，庶不贻误阅者”。据此，此本可断为将拟发刊的清稿本。

是本依《九章算术》体例编辑，习题多取自《益古演段》、《算法统宗》及《九数通考》等书，内容比较浅显，从数学教育史角度言之，目录与序言尚有一定参考价值。兹照录原文附加标点于后。

九章代数草目次

卷首 序 释号 异乘同除 同乘异除 异乘同乘 异除同除 同乘同除 卷一 方田 卷二 粟布 卷三 衰分 卷四 少广 卷五 商功 卷六 均输 卷七 盈朒 卷八 方程 卷九 勾股 卷十 附三角形法

九章代数草序

光绪乙酉，李文忠创北洋武备学堂于天津。录淮军子弟年力富者，延德国将弁教习之以备干城之选。而算量测绘为军事必须之学，西将多非此事专家，又故为迂折延缓，阅一载而仅授加减乘除。文忠调知之招靖于京师，令为算学总教习，同年，姚君石泉、算学老辈华君若汀，先后皆延聘到堂，孙君晓楼亦与焉。聚海内畴人于一堂，朝夕讨论，亦一时之盛也。然学徒中深思者固不乏人，年力太长心不能入者亦多有。杨艺芳京堂总办学事，遂请于文忠另招幼年生徒四十人，算术课程邀靖专授。期年之间，九章之外，代数、几何并能知其概略。功课之暇，举九章几何之题，命各以代数式演之。三阅月成《几何代数術》六卷，《九章代数草》十卷。虽皆畴人易为之事，然髫龄幼童能于学习期年之间而成比算草，岂不大可贵哉。宜德将李宝惊叹赞赏谓吾黄人之智慧且有过于西人也。草藏行箧十余年，奔走俗吏录录鲜暇，无克为诸生校刊。今暂代理直隶大学堂事，胡直生廉访索不佞算稿，因先呈比稿付刊，庶解九章者得据此为治代数之筦钥。沟通会悟，由丙推丁，引伸而触类，盖亦贤所乐闻与。嗟乎，事理繁赜，学术奥博，得其道则事半功倍，失其道则穷年兀兀，玩时废日者多矣。天下事皆如是也。岂区区一算术然哉。

光绪癸卯仲秋沔阳卢靖叙于保定大学堂。

# 十八世纪的数学家棣美弗

吕淑红
(内蒙古师范大学科学史研究所)

在十八世纪数学发展的历史上，棣美弗虽算不上最大的数学家，但也不失其夺目的光华。基于国内人们对他的认识较少，所以本文着重介绍他的生平及他在数学上的成就，意在让人们更多的了解他。

## 一　棣美弗的生平

棣美弗（De Moivre, Abraham）于1667年5月26日生于法国的维特里，1754年11月27日死于英国伦敦，是卡尔文派新教徒。1685年，他因保护卡尔文教徒的南特兹敕令不被废除而遭监禁。不久获释，迁居伦敦。南特法令废除之后，许多耶稣教徒为了免遭迫害而从法国迁移到英国，棣美弗就是其中最有才华的一个。他是在法国受的正规教育，一开始在天主教的乡村学校，后来又在色当的耶稣会学校受教育，只是当他的职业信仰受到压制以后，才不得不到桑墨去学习，据说他是在无人帮助，无人指导的情况下偷着学习数学的。没有人知道他业余时间在研究惠更斯关于数学游戏方面的工作，他去了巴黎之后，读了欧几里德的著作，并且在奥扎南（Tacques Ozanam, 1640－1717）的指导下学习了其他课程，这对他来说算是受了些正规的教育。

棣美弗一生非常穷困，以一个收入不高的教师为职业，也当过作家。他还靠在赌博与年金保险方面给别人当顾问来谋生。尽管在科学界他有许多有权威的朋友，可他得到的资助并不太多。他在英国到处寻求帮助，甚至乞求约翰第1·伯努利代他到莱布尼兹那儿去说情，想谋个数学教授的职位，但是一点作用都没起。后来，他所剩下的只有抱怨，把时间都搭在了去学生家的路上。在他八十七岁时，屈服于嗜眠症，每天睡二十个小时，以后每天又增加上四分之一小时，这在当时已成了笑话，终于，在他睡了整整一天之后，再也没有醒来。

尽管生活上穷困潦倒，可他在数学上仍然孜孜不倦地追求着，在他到伦敦之后，知道了许多经典著作。他于一个偶然的机会看了牛顿的《原理》一书，并很快地精通了这本书。后来他自己叙述了他是怎样漫步于学生中间时读这本书的。

天文学家哈雷（Edmoncl Halley 1656－1742）那时是英国皇家学会的助理秘书，1692年初次和棣美弗相遇，棣美弗给他留下了深刻的印象，正是他为棣美弗通往数学的殿堂辅设了一条道路，1695年他把棣美弗的第一篇论文《关于牛顿的流数说》推荐给英国皇家学会。棣美弗于1697年初选为英国皇家学会的会员，也是哈雷负责帮助他的选举的。棣美弗的第一本书是《机会论》，他曾将它献给了牛顿。据说知识渊博的牛顿也常打发学生："去找棣美弗先生，

他对那些事情了解得比我透"。[1]在那些有智慧，有美德的到英国避难的不幸的人中，没有谁带来过比棣美弗更大的荣誉。1735 年，棣美弗被选为柏林科学院的院士，1754 年进巴黎研究院。他在亚历山大教皇的诗中得到了赞美（关于人的诗篇．Ⅰ 104）。1710 年他接受了重大委托，去解决 莱布尼兹、牛顿关于微积分发明权的争论．这是英国皇家学会一直想要解决的一个问题。

1711 年《皇家学会会报》上用拉丁文连载了他的论文《论赌博法》。后来他成功地进行了扩展，完成他的杰作《机会论》或称为《游戏中概率事件的计算方法》。这部著作第一版于 1718 年，第二版于 1738 年，第三版于 1756 年，都是以英文发表的。《机会论》一书，大大推进了帕斯卡、费尔马和惠更斯等人开创的古典概率论的研究。所谓统计独立的定义，最先就是在他的《机会论》一书中阐明的。该书还包括了掷骰子和其他赌博的许多问题。从这部著作中可以看出，很多重要的结论都是由他给出的。在这本书的第一版有一个非常好的序言，介绍了这本书的模式及实用性，解释了题目的主要规则．并用例子阐明了它们。这个序言在进行了一些删节后，再出现于其他的版本中。1711 年以前，关于概率方面有系统的论文只有惠更斯的《De ratiociniis in ludo aleae》及蒙莫（P. R. Montmort，1678—1719）的《Essay d'analyse sur les juex de hazard》（1708 年发表于巴黎）。就是这两本书中所提出的问题促使棣美弗开始了他最早的研究工作。顺便提一句．关于这一科目的独创性及优先权方面的问题造成了蒙莫和棣美弗之间长期的不和。

棣美弗自己对他就概率论方面的研究成果感到非常满意，他在《机会论》的序言中说："在我刚开始解决关于机会游戏方面问题的时候，看不到光明所在，因为尽管蒙莫先生在他的书中曾给出了这一问题的解决方法，可他仅仅压了三个输或赢的赌注，并且通过假设进一步限制了冒险者之间的一种平等的技巧，况且他也没有给出证明的方法，我是努力冲破这一切的……"[3]

棣美弗的方法于 1733 年 11 月 13 日的一本拉丁文的小册子出版。在《机会论》一书的结尾，介绍并评价了他的这项工作。他得意地说："这是机会游戏方面提出的最难的问题了。"这一问题是：n 次试验中，获得 m 次成功的概率可用 $(a+b)^n$ 的展开式的第 m 项来表示，即 $\binom{n}{m}a^m b^{n-m}$，其中 a 是已知事件出现的概率，b=1－a。棣美费还被誉为论述概率积分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 和正态频率曲线（在统计学的研究中很重要）$y=ce^{-hx^2}$（c 和 h 是常数）的第一人。他的第二篇关于概率论的著作是《综合分析》（1703 年），下面系统地介绍一下棣美弗在概率论方面的成就。

## 二　棣美弗在概率论方面的贡献

概率论的起源应该追溯到七世纪中叶，一个狂热的赌徒、爵士梅勒（C. de Méré）要求帕斯卡（Blaise Pascal 1623—1662）解决一个对他很重要的问题，在比赛当中，一个已赢得 $n<m$ 回，而另一个为 $p<m$，且此比赛在开始时已决定先赢得 m 回合的人将赢得整个比赛，试描述此时两赌徒中赢方的分配情形。帕斯卡将他的答案与费尔玛（Fermart 1601—1665）交换意见，费尔玛同时也发现了一个解决的方法。第三个方法来自惠更斯（Christion Huygens，1629—

1695)。这些科学家注意到研究支配随机事件规则的重要性，这种新科学的概念与第一个方法来源于机会游戏的问题。在十八世纪中，费尔玛、帕斯卡和惠更斯在概率论方面的先驱思想得到了相当详尽的阐述，而概率论之所以能快速发展起来，其中还有雅科布·伯努利的功劳，他在《猜度术》一书中对概率论作了进一步论述。棣美弗在概率论方面的贡献更大。

机会问题的解决需要将二项式中的几个项加到一起，然而在n非常大的情况下，这个问题有很大困难，除了两个伟大的数学家詹姆斯和尼古拉·伯努利之外，很少有人承担这个任务。正如棣美弗自己所说："我知道无人尝试这个问题，虽然他们有很高的技巧，他们的勤奋受到人们的赞扬，但是这些是远远不够的，因为他们所做的并非是由于确定了一个很宽的范围，使他们所证明的各项的和都包含在其中，从而达到非常好的逼近。他们所遵照的方法，在我的札记分析里曾简单地描述过，如果读者有兴趣可以查阅一下，我专心致志对这一问题进行研究，并不是我比别人强，而是人们原谅了我，我所做的这个问题是为了实现一个非常值得尊敬的先生、一位著名数学家的愿望，他鼓励我去做这个问题，我现在给以前的东西增加一些新的思想，是为了使它们更加连贯，清楚。重新开始对很早以前就曾发表的东西继续进行研究，对我来说是很有必要的。"[2]

棣美弗所说的很早以前就曾发表的东西，是指他于十二年，甚至更早以前发表的如下规则Ⅰ：假如二项式 $(1+1)^n$ 的幂n是非常大的，则中心项与所有项的和即2之比可由函数 $\frac{2A\times(n-1)^n}{n^n\times\sqrt{n-1}}$ 来表示，其中A表示双曲对数是 $\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}$ 的数。当n很大时 $\frac{(n-1)^n}{n^n}$ 或 $(1-\frac{1}{n})^n$ 几乎是已知的，不难证明，当n为无穷时 $(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}$。可以看出，假如B的双曲对数是 $-1+\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}$ 即 $\ln B=-1+\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}$ 则 $\frac{2A\times(n-1)^n}{n^n\times\sqrt{n-1}}=\frac{2B}{\sqrt{n-1}}$ 或近似为 $\frac{2B}{\sqrt{n}}$，如果改变 $\ln B$ 的符号，得 $\ln B=\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}$，则上述表达式为 $\frac{2}{B\sqrt{n-1}}$。

棣美弗在开始研究时，只满足于得出一个笼统的B的值，即把已给序列中的一些项加起来，他发觉上述序列收敛，但速度很慢，他对这一成果也感到满意，因此停止了进一步的研究。后来他的朋友，斯特林在他的基础上，对这一问题进行了专心的探讨，发现B是半径为1的圆周长的的平方根，如果用C表示周长，则中心项与所有项之和的比为 $\frac{2}{\sqrt{nc}}$。棣美弗对这一成果感到非常的高兴，虽然他觉得没有必要知道B与圆周长的关系，或者通过别的方式得到B，但他还是觉得这一发现除解决了一些困难之外，在解决问题方面形成了一种独特的优美的风格。

Ⅱ．棣美弗还发现，当n较大时，中心项与任何不同于它的项（与中心项距离为 $l$ 的项）的比的对数可由式子

$$(m+l-\frac{1}{2})\times\log(m+l-1)+(m-l+\frac{1}{2})\times\log(m-l+1)-2m\times\log m+\log\frac{m+l}{m}$$

来逼近 $(m=\frac{1}{2}n)$。

他还得出了如下引理与推论。

推论 1：如果 m 或$\frac{1}{2}$n 是无穷大的数，则中心项与不同于它的项（它与距离为 $l$）的比率的对数为$-\frac{2ll}{n}$。

推论 2：$\ln A=-\frac{2l\cdot l}{n}$则 $A=1-\frac{2ll}{n}+\frac{4l^4}{2nn}-\frac{8l^6}{6n^3}+\frac{16l^8}{24n^4}-\frac{32l^{10}}{120n^5}+\frac{64l^{12}}{720n^6}$。中心项与距它距离为 $l$ 的项之间的所有项的和是：$\frac{2}{\sqrt{nc}}\cdot\ (l-\frac{2l^3}{1\times 3n}+\frac{4l^5}{2\times 5n^2}+\frac{8l^7}{6\times 7n^3}+\frac{16l^9}{24\times 9n^4}-\frac{32l^{11}}{120\times 11n^5}$

令 $l=s\sqrt{n}$，上式变为

$$\frac{2}{\sqrt{c}}(s-\frac{2s^3}{3}+\frac{4s^5}{2\times 5}-\frac{8s^7}{6\times 7}+\frac{16s^9}{24\times 9}-\frac{325^{11}}{120\times 11})$$

设 $s=\frac{1}{2}$，则上式为$\frac{2}{\sqrt{c}}\cdot\ (\frac{2}{1}-\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{2\times 5\times 8}-\frac{1}{6\times 7\times 16}+\frac{1}{24\times 9\times 32}-\frac{1}{120\times 11\times 64}$它收敛的非常快，只用前六项便已得到了六至七位小数。

引理 1：如果一个事件，只依赖于偶然性，以致于它发生与不发生的概率相同，当做 n 次试验去观察它发生与不发生的次数时，设 $l$ 是与上不同的一个已知数，$l<\frac{n}{2}$，则这个事件发生的次数既不多于$\frac{1}{2}n+l$，也不少于$\frac{n}{2}-l$的概率如下：设 L 与 L′是二项式 $(1+1)^n$ 展开式中与中心项距离相等的两项（中心项两侧距离为 $l$），又设 S 是 L 和 L′之间项（包括两端）的和，则所需概率正好是函数$\frac{s}{2n}$。由于这引理是《机会论》的基本原理的根据所在，因此还给出个证明。

推论 3：如果做无数次实验，成功与失败有均等的机会，则既不出现比$\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{n}$次多，也不出现比$\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}$次少的事件概率将是引理 2 中显示的数的 2 倍。

推论 4：虽然进行无数次试验是不切实际的，但前面的结果应用到有限次试验中还是很好的。

推论 5：根据如上所述，可以制定一个基本准则，即当 n 很大时，中心项两边距离为$\frac{\sqrt{n}}{2}$的所有项的和与全体项的和之比为 0．682688，大约为$\frac{28}{41}$。

然而当 n 无限大时，是不可想象的，假如 n 超过 100 而不超过 900 时，以上所给的规则还算准确，因为这已由实验证明了，做这样的实验是值得的，对于 n 来讲，例如取$\frac{1}{2}\sqrt{n}$当 n 增大时，它要大大地小于 n，得出的确实是概率$\frac{28}{41}$。在求包含相等的部分的边界时，发现是距中心项距离大约为$\frac{1}{4}\sqrt{2n}$。

推论 6：假如 $l$ 由$\sqrt{n}$来说明，并不象先前那样收敛的那么快，以达到要求的逼近，当 $l$ 由$\frac{1}{2}\sqrt{n}$来说明，序列少于 12 项或 13 项不行，它需要更多的项。

引理 2：当 n 为任何数时，$(a+b)^n$展开式中，最大的项满足 a 和 b 的幂指数之比与 a 和 b 的比例相同。

推论 7：当 n 无限大时，最大项与所有其它项和的比为$\frac{a+b}{\sqrt{abnc}}$，其中 c 为半径为 $l$ 的圆周长。

推论 8：如果成功或失败的概率是任何已知的不等的数，那么关于二项式 $(a+b)^n$ 展开式各项和的问题仍可用上述方法来解决。

依上述所说，事件发生或不发生有它自然的规则，基本不受偶然性的干扰，可以设想有一个金属圆片，两面都很光滑，除颜色不同外，其它均相同，一面为白色，另一面为黑色，将它抛起来，确定一下出现的是白色还是黑色，随着次数增多，可能白与黑的次数不大相同，但它将趋向于相同。假如做 3600 次试验比率大约为 1∶1，即白色既不会出现比 1830 次多，也不会出现比 1770 次少。换句话说，出现白色的次数既不比 1800 次多出$\frac{3600}{120}$，也不会少于$\frac{3600}{120}$。由同一法则，假如实验次数为 14400，出现白色或黑色的次数将不能偏离$\frac{14400}{260}$即 55 次。若进行 1000000 次试验，偏离数不能超过$\frac{1000000}{2000}=500$次。比率都接近于 1∶1。

以上总结了棣美弗在早期概率发展中提出的一些引理与推论，他在提出二项式分布的逼近之前，所探讨的所有数学问题都与惠更斯及蒙莫的早期工作有着密切的联系。棣美弗一生中最重要的发现出现的比较缓慢，那就是他的二项分布的逼近法，象正态分布或高斯分布一样，在概率论的应用及以后的统计学中，成为最富有成效的最有指导意义的发现。

至少从十五世纪开始，大量的机会游戏，使人们认识到在自然界中存在着一个固定不变的数，但在惠更斯的经典性工作中，甚至蒙莫的工作中，在对游戏及抽彩中奖做猜测的，向读者展示的是一系列具有均等概率的事件，人们常称它做“机会”，只是要求给出进一步的概率值，或进行一下期望而已，没有人把这一“机会”用一个明确的数学公式表示出来，且把稳定出现的次数讲出来，雅科布·伯努利给出了一个答案，而棣美弗二项分布的逼近法，正是表明了他想做出比伯努利更好的一种想法。

在一些试验中，有利事件和不利事件的比率是 p，在 n 次重复的试验中，m 表示有利事件数，考虑一下 p 的区间。p 在两个极限值之间，伯努利证明了这些极限值之间的概率$\frac{m}{n}$随着 n 的增加而增加，当 n 趋于无穷时，趋于 1。尽管伯努利确立了收敛这一事实，但他并没有说明以什么速度收敛，他只是通过对 n 和 p 的特殊取值，进行了大量的计算，从而得到了关于收敛速度的一些观点而已，并没有阐明这一发现的原理，这一工作是棣美弗完成的。棣美弗注意到，可用一个字母代表一个事件发生的两、三种情况，如果用 x 表示一个事件发生的概率，那么 $1-x$ 则意味着这一事件不发生的概率，同样，y、z 也可代表其他两件事发生的概率，例如：$x(1-y)(1-z)$ 则表示一事件发生，而其他两件事没有发生的概率。棣美弗得出结论说：“在同一性质的众多事件中，用一定的标志，而用不着费多少力气，也用不着通过麻烦的想象，即可得到解决”。

《机会论》在关于持续的赌博游戏中取得了很大的进步，给出了较清晰的组合公式，使用了不同的方程，用循环序列来解决问题，并且在用正态逼近来说明问题的时候，使用了函数，这在概率论方面为拉普拉斯奠定了基础。现在，几乎所有的概率论书中都有以棣美弗和拉普拉斯命名的定理，这在概率论中是一个非常重要的定理：

如果α，β依照$hx_\alpha^3\to 0$及$hx_\beta^3\to 0$的方式变化，则

$$P\{\alpha\leqslant S_n\leqslant\beta\}\sim\psi(X_{\beta+\frac{1}{2}})-\psi(x_{\alpha-\frac{1}{2}}) \tag{I}$$

其中$h=(npq)^{-\frac{1}{2}}$，$X_t=(t-np)h$，换言之（Ⅰ）式两端相对误差随$hx_\alpha^3$的趋于零而趋于零。$S_n$表示成功概率为P的n次伯努利试验中成功的次数，〔α，β〕为成功次数落于其中的一个区间。该定理是历史上的第一个极限定理，从近代的观点看，它是中心极限定理的一个非常特殊的情形。

下面再谈一下斯特林公式：

1733年11月12日，棣美弗将自己的一篇七页的论文送给了几个朋友，后来，棣美弗经过修改，又增加了些内容，经翻译后收在《机会论》第二版235～243页上。这篇文章第一次阐述了正规曲线的公式，首先给出了当误差根据整体性分布变化时，已知误差的偶然性事件的概率计算方法。很显然，在斯特林（J. Stirling，1692—1770）之前，棣美弗一直在研究寻找着n！的值的解决方法。棣美弗最初是从二项式$(1+1)^n$的展开式入手，得出了正如我们现在所知道的通过斯特林公式即可算出的，n！接近于$Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$，并且，棣美弗已经清楚常数C，相当于一个无穷序列和的极限值，他说："我中断了这一步的研究：后来我值得尊敬的，有学问的朋友詹姆斯·斯特林先生做了进一步的探讨和研究，找到了$C=\sqrt{2\pi}$。"斯特林公式是分析概率论中的一个重要工具，其内容是：$n!\sim(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$，其中符号～表示两边之比当$n\to\infty$时，趋于1。这个公式是非常有用的。因为它有很大的理论价值，并且，通过它可以得出一些精确的数值估计，公式的两边之差可以超过任何数，但是其相对误差却是很小的，它下降得很迅速，甚至当n很小时，斯特林逼近都很精确，但是从棣美弗的文章及他自己的话中，我们可以知道，棣美弗在斯特林之前已做了大量的研究，他所做的工作绝不亚于斯特林，在斯特林公式中，他是一个被埋没了的角色。

## 三　棣美弗在统计学及其它方面的成就

尽管《机会论》中没涉及统计学的内容，可棣美弗对死亡率方面的统计非常感兴趣，他奠定了年金保险理论的基础，或许，这是受他的朋友哈雷的启发。哈雷于1693年为英皇家学院写过年金保险方面的文章，主要是抗议英政府，在保险年龄上考虑的不恰当，从而导致空洞的生命保险金额。到了1724年，棣美弗发表《生命的年金保险》第一版的时候，他是以计算了大量的事实为根据的，他在布列斯劳城做了五年的观察，将大量的计算都建立在哈雷数据的基础上，这样方便了许多，棣美弗声称："结果进一步证实了那些数据的准确性"。在他的统计表中，他发现很容易就可以确立从十二岁以后，死亡率是一个固定值。事实上，他并没假定这一比率绝对不变。关于这一规律在一定程度上引起了争论，由于它的数学方法简单，且死亡记录又是那样的飘忽不定，无法保证将它集中到一个正规曲线上去。棣美弗对年金保险方面的贡献在于建立在公设的死亡率及人们感兴趣的金钱方面一定比率基础之上的保险公式的求导。

棣美弗也偶尔发表数学的其他方面的论文，他所解决的问题大部分是关于牛顿微积分方面的问题。他年轻的时候，有些工作将他引入关于原著者的纠缠不清的问题之中，包括来自苏格兰的一些小人物，特别是乔治·切尼（George Cheyne）。他在其他方面为数不多的著作中，

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$,

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$,

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的幅角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$,

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$$Z=\cos\psi+i\sin\psi,$$

$$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$$Z=\cos\psi+i\sin\psi,$$

$$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$$Z=\cos\psi+i\sin\psi,$$

$$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. IX, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n x\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$,

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\ 1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$,

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$,

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕 Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕 I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕 D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$$Z=\cos\psi+i\sin\psi,$$

$$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq 0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1 : n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1：n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，ψ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 ψ 和 nψ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献

〔1〕Dictionary of Scientific Biography，1974，CHARLES SCRIBNER'S SON'S，NEW YORK，VOL. Ⅸ，pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter，A History of the Mathematical Theory of Probability，1949，NEW YORK，PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith，A Source Book in Mathematics，1959，NEW YORK，VOL. 2，PP. 566—575.

有一个关于三角方程的重大出现，我们现在称它为棣美弗原理或公式，即：

对于复数 $Z=r(\cos\psi+i\sin\psi)$，其中 r 为复数 Z 的模，$\psi$ 为复数 Z 的辐角，有 $Z^n=r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$，其中 n 是正整数，当 $Z\neq0$ 时，上式对任意正整数 n 均成立。

该定理不仅用于计算复数乘幂，还可通过对 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$ 的左端按二项式定理展开，从而得到正弦和余弦的 n 倍角公式。上述定理是棣美弗 1707 年发现的，这一结果最初发表于 1722 年，但当时并非这种形式，棣美弗只是指出，如果两个角之比为 1∶n，其中 n 为正整数，那么它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两方程消去 Z 而得到，其中 $|z|=1$，

$$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2Zt\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^nx\end{cases}$$

上述结果就蕴涵了 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$，因为既然 t 和 x 分别为角 $\psi$ 和 $n\psi$ 的正矢，故而 $t=1-\cos\psi$，$x=1-\cos n\psi$，上两方程即可表为：$\begin{cases}1-2Z+Z^2=-2(1-\cos\psi)\\1-2Z^n+Z^{2n}=-2Z^n(1-\cos n\psi)\end{cases}$ 分别从上式中解出 Z 和 $Z^n$：有

$Z=\cos\psi+i\sin\psi$，

$Z^n=\cos\psi+i\sin n\psi$

就是 $(\cos\psi+i\sin\psi)^n=\cos n\psi+i\sin n\psi$（n 为正整数）。

只是上述的最后结果是由欧拉于 1748 年得出的，且欧拉还把棣美弗就 n 为正整数的上述结论推广到 n 为任意实数的情形。利用这一公式可导出许多有价值的恒等公式，因此在复数理论的早期发展中成为最有用的公式之一，对使三角学从几何领域起了很大的作用。

## 参考文献


〔1〕Dictionary of Scientific Biography, 1974, CHARLES SCRIBNER'S SON'S, NEW YORK, VOL. Ⅸ, pp. 452—455.

〔2〕I. Todhunter, A History of the Mathematical Theory of Probability, 1949, NEW YORK, PP. 135—193.

〔3〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, 1959, NEW YORK, VOL. 2, PP. 566—575.